УДК 534.04:536.12:51–7

СОЛИТОНЫ И МЕТОД ОБОБЩЁННЫХ ПОДСТАНОВОК КОУЛА–ХОПФА

А. Н. Бызыкчи, В. М. Журавлев

Ульяновский государственный университет,
Россия, 432017, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42.

E-mails: azy.baza@gmail.com, zhvictorm@gmail.com

Рассматривается взаимосвязь между методом обратной задачи и методом обобщённых подстановок Коула—Хопфа. Взаимосвязь этих методов устанавливается на основе сопоставления метода преобразований Дарбу и метода подстановок Коула—Хопфа. Приведены конкретные примеры использования такой взаимосвязи. Рассмотрены новые примеры интегрируемых уравнений.

Ключевые слова: *подстановки Коула—Хопфа, точно интегрируемые нелинейные модели, солитоны.*

Введение. Одним из наиболее общих и эффективных методов анализа нелинейных уравнений, используемых в прикладных задачах, является метод обратной задачи (МОЗ), имеющий несколько вариантов построения решений. Наиболее важными из них являются метод обратной задачи рассеяния [1] и метод преобразований Дарбу [7]. Параллельно с МОЗ существовал метод подстановок Коула—Хопфа, который возник значительно раньше, чем МОЗ, но в форме лишь одного известного результата, относящегося к уравнению Бюргерса [8]. В 80-х годах прошлого века в результате развития МОЗ была обнаружена некоторая общность между уравнениями, линеаризуемыми с помощью подстановок типа Коула—Хопфа, и МОЗ [9]. Уравнения, интегрируемые с помощью подстановок Коула-Хопфа, впоследствии были названы уравнениями типа Бюргерса и составили достаточно широкий класс интегрируемых уравнений.

В работах [2–6] был предложен метод, позволяющий строить уравнения типа Бюргерса и их решения с помощью обобщённых подстановок Коула—Хопфа (МОПКХ). Метод строится на основе анализа условий совместности некоторой базовой системы линейных уравнений. Однако в отличие от метода обратной задачи МОПКХ опирается не на сами условия совместности, а на дифференциальные следствия из исходной системы уравнений. Как показано в [2–6], эту совокупность базовых дифференциальных соотношений всегда можно дополнить еще одним уравнением, замыкающим систему условий совместности до некоторого нелинейного уравнения типа Бюргерса. Свойства построенного таким образом уравнения типа Бюргерса определяются типом замыкающего уравнения. Например, полная интегрируемость построенного уравнения связана с интегрируемостью замыкающего уравнения, при этом последнее может и не быть линейным. Нелинейность замыкающего уравнения использовалась в работах [2–4] для построения точных решений уравнений вязкой и идеальной сжимаемой жидкости.

В данной работе показывается, что МОЗ можно рассматривать как

Александр Николаевич Бызыкчи, магистрант, каф. теоретической физики. *Виктор Михайлович Журавлев* (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. теоретической физики.

МОПКХ с дополнительными ограничениями на вид решений и условием инвариантности формы уравнений при увеличении размерности базовых операторов. Показано, что если не требовать инвариантности формы уравнений, то в качестве решений можно получать точные решения в форме уединенных волн с заданными свойствами, которые не образуют семейства N-солитонных решений. Такой подход особенно востребован в современных задачах нелинейной оптики. В данной работе приводятся примеры построения решений из этой области.

1. Базовые соотношения первого порядка. Опираясь на результаты работ [2–6], в качестве исходной системы линейных уравнений рассмотрим уравнения вида

$$T_x = AT, \quad T_t = BT \tag{1}$$

относительно одной вспомогательной комплексной функции $T(x,t)$ двух вещественных переменных x и t и двух структурных комплексных функции $A(x,t)$ и $B(x,t)$. Дифференцируя однократно первое уравнение по t, а второе — по x, получаем вместе с ними замкнутую однородную алгебраическую систему четырех уравнений относительно функции T и трёх первых её производных: T_x, T_t и T_{xt}. Условием совместности этой системы является структурное уравнение

$$A_t = B_x. \tag{2}$$

В силу этого все производные функции T можно выразить рекуррентно через функцию T или одну любую ее производную по формулам

$$T^{[n,k]} = \frac{\partial^{n+k}T}{\partial x^n \partial t^k} = A^{[n,k]}T,$$

где

$$A^{[n+1,k]} = A^{[n,k]}_x + A^{[n,k]}A, \quad A^{[n,k+1]} = A^{[n,k]}_t + A^{[n,k]}B. \tag{3}$$

и $A^{[1,0]} = A$, $A^{[0,1]} = B$.

К базовой системе (1) можно добавить произвольное интегрируемое, в частности, линейное уравнение для T, которое в итоге с помощью соотношений (3) превращается в нелинейное уравнение относительно функций A, B. При этом это уравнение образует замкнутую систему вместе с уравнением (2). В этом случае базовые соотношения (1) можно рассматривать как обобщённые подстановки Коула—Хопфа. Эти подстановки будем называть подстановками первого уровня.

2. Функциональные подстановки и солитоны. Как указывалось во введении, подстановки типа Коула—Хопфа стали изучать в 80-х годах в связи с развитием МОЗ. Такие уравнения, т.е. уравнения, интегрируемые с помощью подстановок типа Коула—Хопфа, с 80-х годов стали называть уравнениями типа Бюргерса. Методы МОПКХ и МОЗ работают с нелинейными уравнениями, отличающимися по форме, но похожими по структуре. В частности, это было продемонстрировано в [2, 5], где было показано, что уравнение

$$A_t = A_{xxx} + 3(A_x)^2 + 3AA_{xx} + 3A^2A_x \tag{4}$$

является уравнением типа Бюргерса и близко по форме модифицированному уравнению Кортевега—де Вриза (МКДВ):

$$u_t - 2\lambda u_x + 6u^2 u_x - u_{xxx} = 0, \quad \lambda = \mathrm{const},$$

интегрируемому с помощью МОЗ. Как было показано в [2, 5], уравнение (4) линеаризуется подстановками (1) при использовании замыкающего уравнения для функции T следующего вида:

$$T_t = T_{xxx}. \tag{5}$$

В связи с этим возникает вопрос: при каких дополнительных условиях это уравнение переходит в уравнение КДВ или МКДВ? Как оказывается, ответ на этот вопрос достаточно прост. Для этого функция T должна удовлетворять дополнительному условию следующего вида:

$$T_{xx} = \lambda T. \tag{6}$$

Действительно, последнее соотношение эквивалентно связи

$$A_x + A^2 = \lambda.$$

Используя это дополнительное соотношение, легко показать, что уравнение (4), можно привести к виду

$$A_t = A_{xxx} + 3\lambda A_x - 6A^2 A_x,$$

которое представляет собой уравнение МКДВ. Обобщая этот результат, можно показать, что если в методе обобщённых подстановок Коула—Хопфа использовать не одно, а два замыкающих уравнения, то подстановки дают решение уравнений, интегрируемых с помощью МОЗ. Более того, анализируя саму процедуру построения решений в МОЗ с помощью преобразований Дарбу, устанавливаем, что замыкающие уравнения (5) и (6) представляют собой уравнения на собственные функции операторов Лакса для затравочного решения уравнения. Базовые же уравнения (1) представляют собой два одевающих оператора, с помощью которых производится преобразование Дарбу затравочных операторов Лакса к «одетым». Единственным, но существенным, ограничением этой схемы является то, что таким способом можно получить лишь односолитонные решения уравнения МКДВ. Тем не менее эта общая схема подсказывает, как нужно модифицировать базовые уравнения, чтобы получать многосолитонные решения в рамках метода функциональных подстановок типа Коула—Хопфа.

3. Матричные уравнения и нелинейное уравнение Шрёдингера. По аналогии со скалярным случаем рассмотрим теперь в качестве базовых уравнений пару матричных уравнений матричной размерности $n \times n$ первого порядка

$$\widehat{T}_x = \widehat{A}\widehat{T}, \widehat{T}_t = \widehat{B}\widehat{T} \tag{7}$$

относительно одной вспомогательной комплексной матричной функции $\widehat{T}(x,t)$ двух вещественных переменных x и t, содержащих в качестве коэффициентов две, вообще говоря, комплексные матричные функции $\widehat{A}(x,t)$ и $\widehat{B}(x,t)$

той же размерности $n\times n$. Требование, чтобы функция $\widehat{T}(x,t)$ одновременно обращала в тождество два уравнения (7), накладывает на функции $\widehat{A}(x,t)$ и $\widehat{B}(x,t)$ ограничение, которое можно выразить в форме одного матричного уравнения

$$\widehat{A}_t - \widehat{B}_x + [\widehat{A}, \widehat{B}] = 0,$$

совпадающего по форме с уравнением Захарова—Шабата в теории МОЗ, но имеющее несколько иной смысл, в частности, оно не содержит спектрального параметра.

При выполнении (2) все производные функции $\widehat{T}$ можно выразить через саму функцию $\widehat{T}$:

$$\widehat{T}^{[n,k]} = \frac{\partial^{n+k}}{\partial x^n \partial t^k}\widehat{T} = \widehat{A}^{[n,k]}\widehat{T},$$

где матричные функции $\widehat{A}^{[n,k]}$ могут быть вычислены рекуррентно по формулам

$$\widehat{A}^{[n+1,k]} = \widehat{A}_x^{[n,k]} + \widehat{A}^{[n,k]}\widehat{A}, \quad \widehat{A}^{[n,k+1]} = \widehat{A}_t^{[n,k]} + \widehat{A}^{[n,k]}\widehat{B}.$$

с начальными условиями $\widehat{A}^{[1,0]} = \widehat{A}$, $\widehat{A}^{[0,1]} = \widehat{B}$.

Для получения интегрируемых уравнений относительно элементов матриц $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ к базовым уравнениям (7) следует добавить дополнительные замыкающие уравнения на функцию $\widehat{T}$. Для получения уравнений, принадлежащих к классу уравнений интегрируемых МОЗ, как и в скалярном случае, к базовым уравнениям необходимо добавить два дополнительных уравнения.

В качестве основного примера рассмотрим нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ). Для построения его решений с помощью подстановок рассмотрим два следующих замыкающих уравнения для функции $\widehat{T}$:

$$i\hat{T}_x = \hat{D}\hat{T}_{xx} + \hat{T}\hat{\lambda}, \quad \hat{T}_{xx} = \hat{\mu}\hat{T}. \tag{8}$$

Здесь $\widehat{D}$, $\hat{\lambda}$ и $\hat{\mu}$ — некоторые матрицы, зависящие, возможно, от t.

Используя базовые соотношения, находим, что система уравнений (8) эквивалентна следующим уравнениям на матричные функции $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$:

$$i\hat{\hat{B}} = \hat{D}(\hat{A}_x + \hat{\hat{A}}^2) + \hat{T}\hat{\lambda}\hat{T}^{-1}, \quad \hat{A}_x + \hat{A}^2 = \hat{\mu}. \tag{9}$$

Исключая из этих уравнений и (2) матричную функцию $\widehat{B}$, уравнение для $\widehat{A}$ можно привести к следующему виду:

$$i\hat{A}_t + i[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{D}(\hat{A}_{xx} + \hat{A}_x\hat{A} + \hat{A}\hat{A}_x) + \hat{\Lambda}_x.$$

Здесь матрица $\hat{\Lambda}$ имеет вид

$$\hat{\Lambda} = \hat{T}\hat{\lambda}\hat{T}^{-1}.$$

Эта матрица при условии, что $\hat{\lambda}$ не зависит от x, удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial\hat{\Lambda}}{\partial x} = [\hat{A}, \hat{\Lambda}], \quad \frac{\partial\hat{\Lambda}}{\partial t} = [\hat{B}, \hat{\Lambda}]. \tag{10}$$

Действительно, из (7) следует

$$(\widehat{T}^{-1})_x = -\widehat{T}^{-1}\widehat{A}, \quad (\widehat{T}^{-1})_t = -\widehat{T}^{-1}\widehat{B}. \tag{11}$$

Комбинируя (7) и (11):

$$\widehat{T}_x\hat{\lambda}\widehat{T}^{-1} = \widehat{A}\widehat{T}\hat{\lambda}\widehat{T}^{-1}, \quad \widehat{T}_x\hat{\lambda}(\widehat{T}^{-1})_x = -\widehat{T}\hat{\lambda}\widehat{T}^{-1}\widehat{A},$$

приходим к уравнениям (10). Используя еще раз (9), полученное уравнение для $\widehat{A}$ приводится к следующему виду:

$$i\hat{A}_t = -2\hat{D}\hat{A}^3 + \hat{D}\hat{A}_{xx} - \hat{A}\hat{D}\hat{\mu} + 2\hat{D}\hat{\mu}\hat{A} + \hat{D}\hat{A}\hat{\mu} + \hat{\Lambda}_x - [\hat{A}, \hat{\Lambda}].$$

Вследствие выполнения (10) это уравнение принимает окончательный вид

$$i\hat{A}_t = -2\hat{D}\hat{A}^3 + \hat{D}\hat{A}_{xx} - \hat{A}\hat{D}\hat{\mu} + 2\hat{D}\hat{\mu}\hat{A} + \hat{D}\hat{A}\hat{\mu}. \tag{12}$$

Это матричное уравнение содержит кубическую нелинейность и при определённых условиях имеет вид НУШ или его модификаций.

Примером таких условий является специальный выбор матрицы $\widehat{A}$. Рассмотрим в представлении (7) матрицу $\widehat{A}$ следующего вида:

$$\widehat{A} = a(x,t)\hat{1} + u(x,t)\widehat{P} + v(x,t)\widehat{Q}.$$

Здесь $\widehat{P} = \mathbf{p}\otimes\mathbf{p}$ и $\widehat{Q} = \mathbf{q}\otimes\mathbf{q}$ — проекционные матрицы с постоянными векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, ортогональными друг другу ($(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0$) и имеющими размерность n. Для простоты достаточно рассмотреть случай $n = 2$.

Аналогичное представление имеет место и для всех остальных матриц, входящих в базовые и замыкающие уравнения, в частности, для матриц $\widehat{D}$, $\hat{\lambda}$ и $\hat{\mu}$. В результате линейная часть уравнения (12) сводится к трём уравнениям для функций a, u, v. Рассмотрим нелинейное слагаемое, входящее в это уравнение. Имеем

$$\widehat{A}^3 = a^3\hat{1} + \Big(u^3\mathbf{p}^4 + 3au^2\mathbf{p}^2 + 3a^2u\Big)\widehat{P} + \Big(v^3\mathbf{q}^4 + 3av^2\mathbf{q}^2 + 3a^2v\Big)\widehat{Q}.$$

Отсюда видно, что полученная система уравнений относительно функций a, u, v имеет кубическую нелинейность, аналогичную НУШ.

Как и в скалярном случае, получаемые с помощью подстановок (7) решения при условии, что функция $\widehat{T}$ удовлетворяет двум замыкающим уравнениям, дают лишь одно- двухсолитонные решения по классификации МОЗ. Однако существенным отличием излагаемого здесь подхода является то, что в его рамках можно получать квазисолитонные решения даже в том случае, когда матрицы $\widehat{D}$, $\hat{\lambda}$ и $\hat{\mu}$ зависят от t таким образом, что соответствующее НУШ не является интегрируемым с помощью МОЗ. Такие ситуация важны с точки зрения прикладных задач, например, нелинейной оптики.

Заключение. Развитый в данной работе метод показывает, что МОПКХ при дополнительных условиях оказывается эквивалентным МОЗ, но только для односолитонных (возможно — двухсолитонных) решений, интегрируемых с помощью МОЗ уравнений (солитонных уравнений). В отличие от МОЗ такой подход дает возможность получать решения уравнений, которые по форме аналогичны солитонным, но имеют такой набор коэффициентов, который допускает лишь некоторый очень ограниченный класс решений. Это означает, что развитый метод обладает более широкой сферой применения. Вместе с тем ограничение, связанное с возможностью получать лишь односолитонные решения, является существенным и не позволяет утверждать, что такой подход может заменить собой МОЗ. В связи с этим возникает вопрос о возможности построения расширенного варианта данного метода, который бы позволял строить многосолитонные решения уравнений, интегрируемых с помощью МОЗ. Однако решение этой проблемы выходит за рамки данной статьи.

Работа выполнена в рамках федеральных целевых программ «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 годы» и «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 год», а также работ в рамках государственного задания Минобрнауки России № 2.1894.2011, гранта для аспирантов Ульяновского государственного университета и при частичной поддержке РФФИ (проект № 11–01–00747-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский*, Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с. [*V. E. Zaharov, S. V. Manakov, S. P. Novikov, L. P. Pitaevskiy*, Theory of solitons. The method of the inverse problem. Moscow: Nauka, 1980. 320 pp.]
2. *В. М. Журавлев, А. В. Никитин*, "Нелинейные уравнения, связанные с уравнениями теплопроводности и д'Аламбера с помощью подстановок типа Коула–Хопфа" // *Нелинейный мир*, 2007. Т. 5, № 9. С. 603–611. [*V. M. Zhuravlev, A. V. Nikitin*, "On a nonlinear equations associated with heat conduction equation and d'Alembert equation with using Coul–Hopf substitutions" // *Nelineyniy mir*, 2007. Vol. 5, no. 9. Pp. 603–611].
3. *В. М. Журавлев, Д. А. Зиновьев*, "Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула–Хопфа, и точно интегрируемые модели одномерных течений сжимаемой жидкости" // *Письма в ЖЭТФ*, 2008. Т. 87, № 5. С. 314–318; англ. пер.: *V. M. Zhuravlev, D. A. Zinov'ev*, "Nonlinear equations linearized using the generalized Cole–Hopf substitutions and the exactly integrable models of the one-dimensional compressible fluid flows" // *JETP Letters*, 2008. Vol. 87, no. 5. Pp. 266–270.
4. *В. М. Журавлев, Д. А. Зиновьев*, "Метод обобщенных подстановок Коула–Хопфа в размерности 1+2 и интегрируемые модели двумерных течений сжимаемой жидкости" // *Письма в ЖЭТФ*, 2008. Т. 88, № 3. С. 194–197; англ. пер.: *V. M. Zhuravlev, D. A. Zinov'ev*, "Method of generalized Cole–Hopf substitutions for dimension 1+2 and integrable models for two-dimensional compressible flows" // *JETP Letters*, 2008. Vol. 88, no. 3. Pp. 164–166.
5. *В. М. Журавлев*, "Метод обобщенных подстановок Коула–Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений" // *ТМФ*, 2009. Т. 158, № 1. С. 58–71; англ. пер.: *V. M. Zhuravlev*, "The method of generalized Cole–Hopf substitutions and new examples of linearizable nonlinear evolution equations" // *Theoret. and Math. Phys.*, 2009. Vol. 158, no. 1. Pp. 48–60.
6. *В. М. Журавлев, К. С. Обрубов*, "Метод обобщённых подстановок Коула–Хопфа в теории конечномерных нелинейных динамических систем" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 1(22). С. 83–89. [*V. M. Zhuravlev, C. S. Obrubov*, "Method of general Coule–Hopf substitutions in theory of finite-dimensional dynamical systems" // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 1(22). Pp. 83–89].
7. *V. B. Matveev*, "Darboux transformation and explicit solutions of the Kadomtcev–Petviasch-

vily equation, depending on functional parameters" // *Lett. Math. Phys.*, 1979. Vol. 3, no. 3. Pp. 213–216.

8. *G. B. Whitham*, Linear and Nonlinear Waves / Pure and Applied Mathematics. New York: John Wiley & Sons, 1974. xvi+636 pp.; русск. пер.: *Дж. Уизем*, Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1978. 624 с.
9. *С. И. Свинолупов*, "Об аналогах уравнения Бюргерса произвольного порядка" // *ТМФ*, 1985. Т. 65, № 2. С. 303–307; англ. пер.: *S. I. Svinolupov*, "Analogs of the Burgers equation of arbitrary order" // *Theoret. and Math. Phys.*, 1985. Vol. 65, no. 2. Pp. 1177–1180.

Поступила в редакцию 16/XI/2012;
в окончательном варианте — 27/III/2013.

MSC: 34F05, 34D20

SOLITONS AND THE GENERALIZED COLE–HOPF SUBSTITUTIONS

A. N. Byzykchi, V. M. Zhuravlev

Ulyanovsk State University,
42, L. Tolstoy st., Ulyanovsk, 432017, Russia.

E-mails: azy.baza@gmail.com, zhvictorm@gmail.com

This paper examines the relationship between the method of the inverse problem and the method of generalized Cole-Hopf substitutions. The relationship between these methods is established by comparing the method of Darboux transformations and the method of Cole-Hopf substitutions. Concrete examples of using such a relationship are given. Some new examples of the integrable equations are considered.

Key words: *solitons, exactly integrable nonlinear models, Hopf-Cole substitutions.*

Original article submitted 16/XI/2012;
revision submitted 27/III/2013.

Alexander N. Byzykchi, Master Student, Dept. of Theoretical Physics. *Victor M. Zhuravlev* (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Theoretical Physics.