ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 158, № 1
январь, 2009

© **2009 г.** **В. М. Журавлев***

МЕТОД ОБОБЩЕННЫХ ПОДСТАНОВОК КОУЛА–ХОПФА И НОВЫЕ ПРИМЕРЫ ЛИНЕАРИЗУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Предложен новый подход к конструированию нелинейных эволюционных уравнений в матричной форме, интегрируемых с помощью подстановок, аналогичных подстановке Коула–Хопфа, линеаризующей уравнение Бюргерса. С помощью нового подхода найдены новые интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения и их иерархии.

Ключевые слова: точно интегрируемые нелинейные уравнения, уравнения типа Бюргерса, подстановки Коула–Хопфа.

1. ВВЕДЕНИЕ

До появления развитого метода обратной задачи (МОЗ), связанного с представлением нелинейных волновых уравнений в форме условия коммутативности двух или более дифференциальных операторов, одним из наиболее важных результатов в теории нелинейных уравнений математической физики был факт интегрируемости уравнения Бюргерса с помощью линеаризующей подстановки Коула–Хопфа [1], [2]. Вид подстановки Коула–Хопфа сыграл определенную роль в создании МОЗ [2]. Например, подстановка Миуры [3], в некотором смысле аналогичная подстановке Коула–Хопфа, преобразующая уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) в модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (мКдФ), позволила получить бесконечный набор нетривиальных законов сохранения для обоих этих уравнений и доказать их полную интегрируемость.

В дальнейшем метод подстановок типа Коула–Хопфа был существенно расширен. В работе [4] этот метод был распространен на класс эволюционных уравнений вида $u_t = u_n + f(u, u_1, \ldots, u_{n-1})$, где $u = u(x,t)$ – функция двух переменных, $u_n = \partial^n u/\partial x^n$, и составлен полный список уравнений, которые линеаризуются с помощью подстановки Коула–Хопфа. Такие уравнения получили название уравнений типа Бюргерса. В дальнейшем, при развитии симметрийного подхода в теории интегрируемости нелинейных уравнений, уравнения типа Бюргерса обычно приводились

*Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия.
E-mail: zhvictorm@gmail.com

в качестве дополнения к спискам интегрируемых уравнений из-за наличия у них бесконечных серий законов сохранения [5]–[10]. С помощью симметрийного подхода (инварианты Лапласа), в работах [11], [12] был рассмотрен метод нахождения уравнений, которые с помощью дифференциальных подстановок могут быть преобразованы в уравнения аналогичного типа. Матричное обобщение метода подстановки Коула–Хопфа, называемое C-интегрируемостью, было предложено в работе [13]. Связь этого метода с другими методами интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных была рассмотрена в работе [14], где содержится достаточно полная библиография по этой теме (см. также работу [15]). Кроме того, методы, аналогичные подстановкам Коула–Хопфа в виде преобразований Беклунда и методов факторизации в рамках симметрийного подхода, использовались в задаче классификации интегрируемых нелинейных уравнений [5]–[10]. В этих работах была проведена классификация всех нелинейных уравнений, которые обладают бесконечной серией законов сохранения. Однако при таком симметрийном подходе нет прямой возможности сразу в явном виде указать метод построения всех точных решений изучаемых уравнений после доказательства их интегрируемости. Эта проблема обычно решалась в тех случаях, когда для уравнения явно указывалось представление Лакса–Захарова–Шабата (ЛЗШ) или преобразование, сводящее его к уравнению, имеющему представление ЛЗШ. Для таких уравнений можно сразу в явном виде указать их точные солитонные или периодические решения (см., например, [16]–[19] и библиографию в них). Аналогичным свойством обладают уравнения, которые линеаризуются с помощью подстановок типа Коула–Хопфа. Для МОЗ построены алгоритмы вычисления представлений типа ЛЗШ и истинных представлений ЛЗШ даже для многомерных уравнений (см. [18], [19] и библиографию в них). Аналогичный универсальный алгоритм для метода подстановок типа Коула–Хопфа был найден в работах [20]–[22], где с помощью результатов работы [23] получен новый метод построения интегрируемых уравнений типа Бюргерса и их точных решений, основанный на обобщенных линеаризующих подстановках типа Коула–Хопфа, который фактически дает общий алгоритм построения таких уравнений. Идея метода состоит в использовании замыкания совокупности линейных дифференциальных соотношений относительно некоторого набора смешанных производных функции, удовлетворяющей уравнению теплопроводности и уравнению переноса изолиний этой функции [21], [23].

В настоящей работе показано, что результаты работ [21], [22] можно обобщить и применить к построению широкого класса нелинейных уравнений и их систем, линеаризуемых с помощью подстановок типа Коула–Хопфа. Перечислены все возможные уравнения типа Бюргерса в размерности $1+1$, в том числе и матричные. Приведен ряд примеров использования этого метода для нахождения конкретных уравнений, в том числе уравнений динамики сжимаемой жидкости.

2. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ПОДСТАНОВОК КОУЛА–ХОПФА

Как отмечалось в разделе 1, подход, основанный на матричном обобщении подстановок Коула–Хопфа, называется C-интегрируемостью [13], [14]. Приведенные ниже результаты дают общий алгоритм построения матричных уравнений, интегрируемых с помощью матричного аналога подстановок типа Коула–Хопфа.

Следуя работам [21], [22], рассмотрим следующую пару матричных уравнений относительно матричной функции $\widehat{T}$:

$$\widehat{T}_t - \widehat{D}\widehat{T}_{xx} + \widehat{W}\widehat{T}_x = 0, \tag{1}$$

$$\widehat{T}_t + \widehat{V}\widehat{T}_x = 0, \tag{2}$$

где $\widehat{T}$, $\widehat{W}$, $\widehat{V}$, $\widehat{D}$ – квадратные $(M \times M)$-матрицы, элементы которых являются функциями x и t. Вычисляя совокупность производных согласно [22] для скалярного случая, получаем систему соотношений для производных в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\widehat{T}_{tt} - \widehat{D}\widehat{T}_{xxt} + \widehat{W}_t\widehat{T}_x + \widehat{W}\widehat{T}_{xt} - \widehat{D}_t\widehat{T}_{xx} = 0,\\
&\widehat{T}_{tt} + \widehat{V}_t\widehat{T}_x + \widehat{V}\widehat{T}_{tx} = 0,\\
&\widehat{T}_{xt} - \widehat{D}\widehat{T}_{xxx} + \widehat{W}_x\widehat{T}_x + \widehat{W}\widehat{T}_{xx} - \widehat{D}_x\widehat{T}_{xx} = 0,\\
&\widehat{T}_{xt} + \widehat{V}_x\widehat{T}_x + \widehat{V}\widehat{T}_{xx} = 0,\\
&\widehat{T}_{txx} + \widehat{V}_{xx}\widehat{T}_x + 2\widehat{V}_x\widehat{T}_{xx} + \widehat{V}\widehat{T}_{xxx} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Исключая последовательно из этих уравнений все высшие производные матрицы $\widehat{T}$, получаем систему базовых соотношений:

$$\begin{aligned}
&\widehat{T}_t = -\widehat{V}\widehat{T}_x, \qquad \widehat{T}_{xx} = -\widehat{U}\widehat{T}_x, \qquad \widehat{T}_{xt} = -\widehat{Q}\widehat{T}_x,\\
&\widehat{T}_{tt} = -[V_t - \widehat{V}\widehat{Q}\,]\,\widehat{T}_x,\\
&\widehat{T}_{xxx} = [-\widehat{U}_x + \widehat{U}^2]\,\widehat{T}_x,\\
&\widehat{T}_{xxt} = [-\widehat{U}_t + \widehat{U}\widehat{Q}\,]\,\widehat{T}_x = [-\widehat{V}_{xx} + \widehat{Q}\widehat{U} + \widehat{V}_x\widehat{U} + \widehat{V}\widehat{U}_x]\,\widehat{T}_x,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\widehat{U} = \widehat{D}^{-1}(\widehat{V} - \widehat{W})$, $\widehat{Q} = \widehat{V}_x - \widehat{V}\widehat{U}$. Сравнивая два выражения, полученных для $\widehat{T}_{xxt}$, приходим к следующему уравнению совместности этой системы:

$$\widehat{U}_t + [\widehat{Q}, \widehat{U}\,] + \frac{\partial}{\partial x}(\widehat{V}\widehat{U}\,) - \widehat{V}_{xx} = 0 \tag{5}$$

или

$$\widehat{U}_t + [\widehat{Q}, \widehat{U}\,] - \frac{\partial}{\partial x}\,\widehat{Q} = 0, \tag{6}$$

где $[\widehat{Q}, \widehat{U}\,] = \widehat{Q}\widehat{U} - \widehat{U}\widehat{Q}$ – коммутатор матриц. Уравнение (6), как нетрудно видеть, является уравнением нулевой кривизны Захарова–Шабата [16] для двух линейных матричных операторов первого порядка:

$$\Psi_x = \widehat{U}\Psi, \qquad \Psi_t = \widehat{Q}\Psi,$$

где $\Psi = \widehat{T}_x$. Это уравнение является центральным в теории МОЗ. Однако, в отличие от МОЗ, при таком подходе не требуется наличия спектрального параметра для построения решений уравнений, соответствующих (6). Точные решения получаются из базовых соотношений (4), а дополнительная связь возникает из дополнительного условия для матричной функции $\widehat{T}$.

Таким образом, полученный результат сводится к тому, что для любой матричной функции $\widehat{T}(x,t)$, имеющей все смешанные производные до третьего порядка включительно в заданной области переменных x, t, матричные функции $\widehat{U}(x,t)$ и $\widehat{V}(x,t)$, связанные с $\widehat{T}(x,t)$ соотношениями (4), удовлетворяют структурному уравнению (6).

Высшие производные матричной функции T связаны с производной $\widehat{T}_x$ соотношениями следующего общего вида:

$$\widehat{T}^{\,[n,k]} = \hat{A}^{\,nk}[\widehat{V},\widehat{U}\,]\widehat{T}_x, \tag{7}$$

где матричные функции $\hat{A}^{nk}[\widehat{V},\widehat{U}\,]$ являются дифференциальными полиномами от матриц $\widehat{V}$, $\widehat{U}$ и их производных. Дифференциальные полиномы $\hat{A}^{nk}[\widehat{V},\widehat{U}\,]$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{gathered}\hat{A}^{n+1\,k} = \hat{A}^{nk}_x + \hat{A}^{nk}\hat{A}^{20},\\ \hat{A}^{n\,k+1} = \hat{A}^{nk}_t + \hat{A}^{nk}\hat{A}^{11},\\ \hat{A}^{20} = -\widehat{U}, \qquad \hat{A}^{11} = -\widehat{Q}, \qquad n,k = 0,1,2\ldots,\end{gathered} \tag{8}$$

которые получаются из расширенной системы базовых соотношений (4), (7) дифференцированием по x и t до любого конечного порядка $[k,n]$ (при естественном предположении существования производных соответствующего порядка матричной функции $\widehat{T}$).

Пусть существуют матричные функции $\widehat{C}_{kn}(x,t)$ такие, что между функциями $\widehat{U}$ и $\widehat{V}$ имеется следующая связь:

$$\sum_{k=0}^{M}\sum_{n=1}^{N}\widehat{C}_{kn}(x,t)\hat{A}^{kn}[\widehat{V},\widehat{U}\,] = 0. \tag{9}$$

Тогда функция $\widehat{T}$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\sum_{k=0}^{M}\sum_{n=1}^{N}\widehat{C}_{kn}\widehat{T}^{[k,n]} = 0, \tag{10}$$

при этом совместное решение относительно функций $\widehat{U}$, $\widehat{V}$ и $\widehat{Q}$ уравнения (6) со связью (9) имеет вид

$$\widehat{V} = -\widehat{T}_t[\widehat{T}_x]^{-1}, \qquad U = -\widehat{T}_{xx}[\widehat{T}_x]^{-1}, \qquad \widehat{Q} = -\widehat{T}_{xt}[\widehat{T}_x]^{-1}. \tag{11}$$

Последние соотношения вместе с формулой (7) назовем обобщенными подстановками Коула–Хопфа. Этот результат является обобщением результата работы [22] и служит основой для вычисления всей совокупности уравнений типа Бюргерса. Сформулируем его в виде следующего утверждения.

Утверждение. *Любое нелинейное уравнение типа Бюргерса конечного порядка, линеаризуемое с помощью обобщенных подстановок Коула–Хопфа* (11) *и, возможно,* (7), *может быть представлено системой двух уравнений* (9) *и* (5).

Справедливость данного утверждения вытекает из следующих фактов. Списки уравнений (9) и (10) имеют взаимно однозначное соответствие, определяемое соотношениями (7), (8), вид которых не зависит ни от функциональной формы $\widehat{T}$,

ни от вида уравнений (10). Кроме того, соотношения (7) определены для любого конечного порядка производных матричной функции $\widehat{T}$. Далее, уравнение (10) представляет собой линейное уравнение общего вида произвольного конечного порядка с переменными коэффициентами и, следовательно, представляет полный список таких уравнений. По определению *уравнением типа Бюргерса* называется уравнение, которое сводится к некоторому линейному уравнению с помощью подстановок (11) и, возможно, (7). Следовательно, каждому уравнению типа Бюргерса соответствует хотя бы одно линейное уравнение из списка (10) в силу полноты этого списка. Поскольку каждому уравнению из списка (10) соответствует одно уравнение (9), а все обобщенные подстановки перечислены соотношениями (7) и (8), то уравнение типа Бюргерса может быть представлено как система уравнений (9) и (5).

3. СКАЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В частном случае при размерности матриц $M = 1$ (скалярный случай) структурное уравнение (5) преобразуется в более простое уравнение

$$U_t = Q_x. \tag{12}$$

При этом функции $A^{nk}[U, V]$ будут удовлетворять рекуррентным соотношениям

$$A^{n+1\,k} = A^{nk}_x + A^{nk}A^{11}, \qquad A^{n\,k+1} = A^{nk}_t + A^{nk}A^{02}, \qquad n,\, k = 0, 1, 2\ldots,$$

с начальными условиями

$$\begin{gathered} A^{01} = 1, \qquad A^{10} = -\frac{1}{V}, \qquad A^{11} = \left[\frac{V_x}{V} - U\right], \\ A^{20} = \frac{U}{V}, \qquad A^{02} = \left[\frac{V_t}{V} - V_x + VU\right]. \end{gathered} \tag{13}$$

В частности, для производных $T^{[n,0]}$ имеем следующие рекуррентные соотношения:

$$T^{[n,0]} = \frac{1}{V}\, G_n[U]T_t, \qquad n = 1,\, 2, \ldots, \tag{14}$$

где $G_n[U]$ – дифференциальные выражения с постоянными коэффициентами относительно функции U, удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$G_{n+1}[U] = \frac{\partial}{\partial x}\, G_n[U] - UG_n[U], \qquad n = 1,\, 2, \ldots, \tag{15}$$

с начальным условием

$$G_1[U] = -1.$$

Для нескольких первых рекуррентных соотношений имеем

$$\begin{gathered} G_2 = U, \qquad G_3 = U_x - U^2, \qquad G_4 = U_{xx} - 3UU_x + U^3, \\ G_5 = U_{xxx} - 4UU_{xx} - 3U_x^2 + 6U^2U_x - U^4, \ldots . \end{gathered} \tag{16}$$

Для производных $T^{[n,1]}$ рекуррентные соотношения имеют вид

$$T^{[n,1]} = H_n[Q]T_t, \qquad n = 1,\, 2, \ldots, \tag{17}$$

где $H_n[Q]$ – дифференциальные выражения с постоянными коэффициентами относительно функции

$$Q = \frac{\partial}{\partial x} \ln V - U. \tag{18}$$

Функции $H_n[Q]$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$H_{n+1}[Q] = \frac{\partial}{\partial x} H_n[Q] + Q H_n[Q], \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

с начальным условием

$$H_1[Q] = Q.$$

Для нескольких первых рекуррентных соотношений имеем

$$\begin{aligned} &H_2 = Q_x + Q^2, \qquad H_3 = Q_{xx} + 3QQ_x + Q^3, \\ &H_4 = Q_{xxx} + 4QQ_{xx} + 3(Q_x)^2 + 6Q^2Q_x + Q^4, \ldots . \end{aligned} \tag{20}$$

Различные совокупности рекуррентных соотношений порождают определенные иерархии нелинейных уравнений, линеаризуемых с помощью предложенного метода. Приведем несколько примеров.

Используя соотношения (14) и полагая в качестве условия связи соотношение

$$V = \sum_{n=1}^{N} C_n(x,t) G_n[U], \tag{21}$$

которое соответствует базовому уравнению

$$\sum_{n=1}^{N} C_n(x,t) T^{[n,0]} = T_t, \tag{22}$$

получаем последовательную цепочку уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \frac{\partial}{\partial x} \left[U \sum_{n=1}^{N} C_n(x,t) G_n[U] \right] = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^{N} C_n(x,t) G_n[U]$$

при произвольных функциях $C_n(x,t)$, которая аналогична высшим уравнениям иерархии КдФ, но интегрируется не с помощью метода обратной задачи рассеяния, а линеаризуется с помощью обобщенной подстановки Коула–Хопфа (11). Первые уравнения этой иерархии, соответствующие G_1, G_2, G_3, … и постоянным коэффициентам C_n, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &U_t + C_1 \frac{\partial}{\partial x} U = 0, \\ &U_t + C_2 \frac{\partial}{\partial x} (U^2 - U_x) = 0, \\ &U_t + C_3 \frac{\partial}{\partial x} (3UU_x - U^3 - U_{xx}) = 0, \\ &U_t + C_4 \frac{\partial}{\partial x} (4UU_{xx} + 3U_x^2 - 6U^2U_x + U^4 - U_{xxx}) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{aligned} \tag{23}$$

Первым нетривиальным уравнением в этой цепочке при $n = 1$ в (14) является уравнение простой волны, затем уравнение Бюргерса, уравнение мКдФ и т.д. Все эти уравнения принадлежат общему классу уравнений, полученных в работе [4].

Эту иерархию можно преобразовать в более сложную иерархию уравнений. Именно, вместо (22) рассмотрим базовое соотношение вида

$$\sum_{n=1}^{N} C_n(x,t)T^{[n,0]} = T_{tt}, \tag{24}$$

полученное из (22) заменой в правой части первой производной функции T по времени на вторую. Этому базовому соотношению соответствуют связи

$$V_t - VV_x + V^2U = VF_N[U], \tag{25}$$

где

$$F_N[U] = \left(\sum_{n=1}^{N} C_n(x,t)G_n[U]\right)^{-1}.$$

При этом структурное уравнение (12) принимает вид

$$U_t - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\ln V + \frac{\partial}{\partial x}F_N[U] = 0. \tag{26}$$

Аналогичным образом могут быть получены и другие типы иерархий, связанные с рекуррентной цепочкой соотношений (14).

4. УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ

Уравнения вида (26) представляют собой нелинейные уравнения типа телеграфного уравнения и встречаются в теории двухпроводных нелинейных линий связи [19], [24], [25]. Уравнения таких линий можно представить в следующем общем виде:

$$\frac{\partial i}{\partial \xi} + C\,\frac{\partial u}{\partial \tau} + J(u) = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + L\,\frac{\partial i}{\partial \tau} + I(u) = 0, \tag{28}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[C\,\frac{\partial u}{\partial \tau}\right] - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{L}\,\frac{\partial u}{\partial \xi}\right] + \frac{\partial}{\partial \tau}\,J(u) - \frac{\partial}{\partial \xi}\,I(u) = 0, \tag{29}$$

где C, L – погонные индуктивность и емкость линии, $J(u)$, $I(u)$ – вольт-амперные характеристики нелинейных активных элементов линии. Нетрудно видеть, что каждое из построенных выше уравнений представляет собой модель двухпроводной линии с определенным типом нелинейных свойств.

Наиболее простыми примерами могут служить два уравнения. Первое из них соответствует следующим соотношениям:

$$\begin{gathered} T_{xt} + aT_t + bT_x = 0, \\ V_x - UV + aV - b = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t\partial x}\ln V + \frac{\partial}{\partial t}\left[a - \frac{b}{V}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[aV - b\right] = 0, \end{gathered} \tag{30}$$

где a, b – произвольные заданные функции x, t. Второе уравнение соответствует следующим соотношениям:

$$\begin{gathered} T_{tt} + \gamma T_{xx} + \alpha T_t + \beta T_x = 0, \\ [V_t - VV_x + V^2 U] + \gamma U + \alpha V - \beta = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{V_t + \gamma_x/2}{\gamma + V^2}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\gamma V_x - \gamma_t/2}{\gamma + V^2}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\alpha V - \beta}{\gamma + V^2}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{V(\alpha V - \beta)}{\gamma + V^2}\right], \end{gathered} \tag{31}$$

где α, β, γ – произвольные функции x, t.

В частности, используя подстановку

$$V = e^u, \qquad u = u(\xi, \tau),$$

где $\xi = x + t$, $\tau = x - t$, и, полагая для простоты $\alpha = \beta = \mathrm{const}$, приведем уравнение (30) к виду (27):

$$u_\xi + i_\tau - 2\alpha \operatorname{sh} u = 0, \qquad u_\tau + i_\xi - 2\alpha \operatorname{ch} u = 0$$

или (29) при $C = L = 1$:

$$u_{\xi\xi} - u_{\tau\tau} + 2\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{sh} u + 2\alpha \frac{\partial}{\partial \tau} \operatorname{ch} u = 0.$$

Характеристики нелинейных элементов в такой модели имеют простой вид $J(u) = -2\alpha \operatorname{ch} u$, $I(u) = 2\alpha \operatorname{sh} u$ и реализуются в линиях с распределенными (p–n)-переходами и биологических мембранах [19], [24], [25].

Динамика напряжений в линиях такого типа описывается общим решением линейного телеграфного уравнения, которое можно представить в виде интеграла Фурье–Лапласа

$$T(\xi, \tau) = \int_C A(k) e^{ik\xi - i\omega(k)\tau}\, dk,$$

где $\omega(k) = \pm\sqrt{k^2 - 2\alpha i k}$, $A(k)$ – произвольная комплексная функция и интеграл берется по некоторому контуру C в комплексной плоскости параметра k. Соответствующее решение для $u = \ln V$ может быть записано в виде

$$u = \ln V = \ln\left\{\frac{\int_C A(k)(\omega(k) + k)\exp[ik\xi - i\omega(k)\tau]\, dk}{\int_C A(k)(\omega(k) - k)\exp[ik\xi - i\omega(k)\tau]\, dk}\right\}.$$

Асимптотические свойства решений такого типа могут быть установлены методом перевала [2].

Отметим, что уравнение (31) и все уравнения типа (26) и аналогичных цепочек могут служить моделями двухпроводных линий с нелинейностью обобщенного вида.

5. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Развитый подход имеет еще одну модификацию, позволяющую находить уравнения, которые не линеаризуются, но с помощью тех же подстановок (11) сводятся к некоторому интегрируемому нелинейному дифференциальному уравнению. Систематизацию таких случаев провести сложно. Поэтому мы рассмотрим несколько отдельных примеров, которые могут продемонстрировать некоторые возможности данного подхода и имеют важное прикладное значение.

Пример 1. Рассмотрим базовое соотношение

$$\frac{T_{xx}}{T_t} + p\,\frac{T_{xt}}{T_x} = 0, \tag{32}$$

где $p = p(t)$ – произвольная функция t. Это уравнение эквивалентно связи следующего вида:

$$U - pV(V_x - UV) = 0. \tag{33}$$

Отсюда получаем

$$U = \frac{pVV_x}{1 + pV^2}.$$

Подставляя это выражение в (12), получаем линеаризуемое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{pVV_x}{1+pV^2}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{V_x}{1+pV^2}\right] = 0, \tag{34}$$

которое допускает однократное интегрирование по x. В результате получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(pV^2) + V_x = C_0(t)(1 + pV^2),$$

где $C_0(t)$ – постоянная интегрирования, параметрически зависящая от t. Это уравнение аналогично уравнению “простых” волн (см., например, [2], [26], [27] и библиографию в них).

Уравнение (32) приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial x}\,[(T_x)^2 + p(T_t)^2] = 0,$$

или

$$[(T_x)^2 + p(T_t)^2] = C_1(t).$$

Это уравнение следует разрешить относительно одной из производных

$$T_x = \pm\sqrt{C_1 - p(T_t)^2}\,.$$

Положим $C_1 = \mathrm{const}$ и введем новую переменную $d\tau = (p(t))^{-1/2}\,dt$. Далее, вводя обозначение $\zeta = T_\tau$ и дифференцируя это соотношение по τ, приходим к уравнению обрушивающихся волн

$$\zeta_x \mp \frac{\zeta}{\sqrt{C_1 - \zeta^2}}\,\zeta_\tau = 0,$$

решение которого сводится к решению неявного алгебраического уравнения

$$F(\zeta, \tau\sqrt{C_1 - \zeta^2} \mp x\zeta) = 0,$$

где $F(\zeta, \xi)$ – произвольная дифференцируемая функция двух аргументов.

Пример 2. Пример, рассмотренный в работе [22], дает базовое уравнение для T следующего вида:

$$T_{xx}T_{tt} - (T_{xt})^2 = 0. \tag{35}$$

Этому уравнению соответствует связь

$$U(V_t - VV_x + V^2U) = (V_x - VU)^2.$$

Преобразуя последнее соотношение и объединяя его с (12), получаем систему уравнений гидродинамического типа:

$$\begin{gathered} U(V_t + VV_x) = (V_x)^2, \\ U_t + \frac{\partial}{\partial x}(UV) = V_{xx}. \end{gathered} \tag{36}$$

Умножая второе уравнение (36) на V и складывая его с первым, получаем следующую эквивалентную систему:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}(UV) + \frac{\partial}{\partial x}(UV^2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}V^2, \\ U_t + \frac{\partial}{\partial x}(UV) = V_{xx}. \end{gathered} \tag{37}$$

Положим

$$\rho = U, \qquad u = V - U^{-1}V_x, \qquad p = V_t + VV_x - U^{-1}(V_x)^2 = 0. \tag{38}$$

Тогда система (37) приводится к системе уравнений одномерного течения сжимаемого газа

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) = -\frac{\partial}{\partial x}p, \tag{39}$$

$$\rho_t + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \tag{40}$$

где ρ – плотность сжимаемого газа, u – скорость течения газа, p – давление. В силу уравнения (36) давление в этом случае обращается в нуль. Полученные уравнения и их решения соответствуют баротропному течению сжимаемой жидкости.

Решение уравнения (35) будем искать в виде

$$T_t = S(T_x), \tag{41}$$

где $S(z)$ – произвольная дифференцируемая функция своего аргумента. В результате замены $T_x = q$ последнее уравнение приводится к уравнению

$$q_t = S'(q)q_x,$$

решение которого является решением алгебраического уравнения (см. [2], [27])

$$F(q, x - S'(q)t) = 0,$$

где $F(\xi,\tau)$ – произвольная дифференцируемая функция. После построения решения для T функции V и U находятся с помощью подстановок

$$V=-\frac{T_t}{T_x}\,,\qquad \rho=U=-\frac{T_{xx}}{T_x}\,,\qquad u=-\frac{T_{xt}}{T_{xx}}\,.$$

Учитывая соотношения (38), находим плотность потока, его давление и скорость. Все решения уравнений (39) определяются двумя дифференцируемыми функциями S и F.

Нетрудно видеть, что базовое соотношение можно дополнить его квадратичными слагаемыми по производным T таким образом, чтобы получались интегрируемые по T уравнения. Если ввести скобки

$$\{G,H\}=G_xH_t-G_tH_x,$$

то в самом общем виде базовое соотношение, приводящее к системе (39) с ненулевым давлением, можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} p&=\frac{1}{U(T_x)^2}\,\{T_x,\Phi\}-\int\frac{1}{(T_x)^2}\,\{T_x,\Phi\}\,dx=\\ &=-\frac{1}{UT_x}\,[U\Phi_t-Q\Phi_x]+\int\frac{1}{T_x}\,[U\Phi_t-Q\Phi_x]\,dx, \end{aligned}\tag{42}$$

где $\Phi=\Phi(x,t)$ – произвольная функция x, t, при этом

$$U(V_t+VV_x)-(V_x)^2=\{T_x,\Phi\}.$$

Давление в уравнении (39) принимает вид

$$p=U^{-1}\{T_x,\Phi\}-\int\{T_x,\Phi\}\,dx,$$

а интегралом базового соотношения (42) будет уравнение

$$T_t=S(T_x)+\Phi(x,t).\tag{43}$$

Функцию Φ определим следующим образом:

$$\Phi=\alpha T+\nu T_{xx}+\gamma T_{xxx}.$$

В результате уравнение (43) принимает вид

$$T_t=S(T_x)+\alpha T+\nu T_{xx}+\gamma T_{xxx},$$

который при выборе $S(q)=Aq+Bq^2+cq^3$ и подходящем подборе постоянных α, ν, γ, A, B, C приводит к различным вариантам интегрируемых уравнений для T. В частности, при $\gamma=0$ первое уравнение в (39) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}\,(\rho u^2)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\rho\,\frac{\partial}{\partial x}\,u\right)=(\alpha-\nu\rho^2)u_x.\tag{44}$$

Уравнение (44) представляет собой одномерное уравнение Навье–Стокса для сжимаемой жидкости с кинематической вязкостью ν, функция в правой части уравнения может рассматриваться как градиент давления в среде. Более общий результат относительно уравнений сжимаемой жидкости изложен в работе [22].

6. ЛИНЕАРИЗУЕМЫЕ МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В случае матриц размерности $M > 1$ линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула–Хопфа уравнения представляют собой системы нелинейных уравнений. Таких систем гораздо больше, чем в скалярном случае, поэтому приведем лишь несколько простых примеров.

Пример 3. В случае связи $\widehat{Q} = \widehat{C}\widehat{U}$, где $\widehat{C}$ – некоторая постоянная матрица, базовым интегрирующим уравнением является уравнение вида

$$\widehat{T}_{xt} = \widehat{C}\widehat{T}_{xx}.$$

Структурное уравнение приобретает в этом случае следующий вид:

$$\widehat{U}_t + [\widehat{C}, \widehat{U}]\widehat{U} - \widehat{C}\widehat{U}_x = 0. \tag{45}$$

Уравнения этого типа имеют квадратичную нелинейность, аналогичную нелинейности уравнений генерации второй гармоники и взаимодействия n-волн [16], которые встречаются в нелинейной оптике и акустике. Для иллюстрации структуры получаемых уравнений рассмотрим случай матриц размерности $M = 2$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} \widehat{U} = \begin{pmatrix} a(x,t) & u(x,t) \\ v(x,t) & b(x,t) \end{pmatrix}, \qquad \widehat{C} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \\ A(x,t) = a(x,t) + iv(x,t), \qquad B(x,t) = b(x,t) + iu(x,t). \end{gathered} \tag{46}$$

В этом случае система (45) будет иметь вид системы уравнений для комплексных амплитуд A и B двух связанных волноводов с квадратичной нелинейностью без дисперсии и с диссипацией:

$$\begin{aligned} A_t + i\lambda A_x + i\lambda A^* B^* - i\lambda |A|^2 = 0, \\ B_t - i\lambda B_x - i\lambda B^* A^* + i\lambda |B|^2 = 0. \end{aligned}$$

Пример 4. Следующим по сложности матричным нелинейным уравнением, которое линеаризуется с помощью данного подхода, является матричное уравнение, соответствующее связи $\widehat{V} = \widehat{C}\widehat{U}$, где $\widehat{C}$ – также некоторая постоянная матрица. Базовым уравнением, к которому оно приводится, будет матричное уравнение следующего вида:

$$\widehat{T}_{xx} + \widehat{C}\widehat{T}_t = 0,$$

а само уравнение принимает следующий вид:

$$\widehat{C}^{-1}(\widehat{U}_t - [\widehat{C}, \widehat{U}\,]\widehat{U}^2) + 2\widehat{U}_x\widehat{U} + \frac{\partial}{\partial x}(\widehat{U}^2) - \widehat{U}_{xx} = 0. \tag{47}$$

Система уравнений для элементов матрицы $\widehat{U}$ уже имеет кубическую нелинейность, аналогичную нелинейному уравнению Шредингера. Если матрицы $\widehat{U}$ и $\widehat{C}$ выбрать так же, как в предыдущем примере (46), система (47) будет иметь вид системы уравнений для комплексных амплитуд A и B уже с кубической нелинейностью:

$$\begin{aligned} A_t + i\lambda A_{xx} - i\lambda A B_x^* + i\lambda M_x + i\lambda \frac{H}{2} = 0, \\ B_t - i\lambda B_{xx} + i\lambda B A_x^* + i\lambda N_x + i\lambda \frac{G}{2} = 0, \end{aligned}$$

где

$$M = A^*B^* - \frac{A^2}{2} - |A|^2, \qquad N = A^*B^* - \frac{B^2}{2} - |B|^2,$$
$$H = A\big[|A|^2 + |B|^2 - BA\big] + A^*\big[|A|^2 + |B|^2 + (A + A^*)(B - B^*) - BA^*\big],$$
$$G = B\big[|A|^2 - |B|^2 + BA\big] - B^*\big[|A|^2 - |B|^2 + (A - A^*)(B + B^*) - BA^*\big].$$

Еще одним полезным примером является простая связь $V = C(U_x - U^2)$, которая приводит к матричному обобщению уравнений КдФ и мКдФ, но в силу его громоздкости мы приводить ее не будем. Это уравнение линеаризуется к матричному уравнению

$$\widehat{T}_{xxx} = \widehat{C}\widehat{T}_t.$$

Следует отметить, что в матричном случае существуют иерархии уравнений, которые строятся по аналогии со скалярным случаем.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как было показано, рассмотренный в работе подход является универсальным способом для построения уравнений, которые линеаризуются с помощью подстановок типа Коула–Хопфа. Фактически метод перечисляет все такие уравнения в размерности $1 + 1$. На конкретных примерах показано, что метод имеет приложения в различных разделах теоретической и математической физики. Сам метод основывается на достаточно общих аналитических свойствах функций общего вида, в том числе и матричных. По всей видимости, он может иметь приложения в более широкой области математической физики, чем простое генерирование линеаризуемых нелинейных уравнений. Однако в таком виде рассмотренные примеры дают ценную информацию о классах полностью интегрируемых нелинейных уравнений, но не с помощью МОЗ, а с помощью метода линеаризации. Можно, однако, высказать гипотезу, что рассмотренный в данной работе подход тесным образом связан с МОЗ, поскольку структурные уравнения (6) имеют вид уравнений, используемых в представлении ЛЗШ, интегрируемых с помощью МОЗ. Отличие этих подходов состоит в различных видах ограничений на функции $\widehat{T}$. Для данного подхода это дополнительное уравнение для $\widehat{T}$ общего вида (10), а для МОЗ – это дополнительные условия на спектральные свойства функции $\widehat{T}$ и соответствующих базовым соотношениям линейные операторы. Однако этот вопрос требует отдельного анализа.

Список литературы

[1] J. M. Burgers, *The Nonlinear Diffusion Equation. Asymptotic Solutions and Statistical Problems*, Reidel, Dordrecht, Holland, 1974.

[2] Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1978.

[3] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:19 (1967), 1095–1097.

[4] С. И. Свинолупов, *ТМФ*, **65**:2 (1985), 303–307.

[5] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.

[6] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *УМН*, **42**:4(256) (1987), 3–53.

[7] В. В. Соколов, *УМН*, **43**:5(263) (1988), 133–163.

[8] С. И. Свинолупов, В. В. Соколов, *УМН*, **47**:3(285) (1992), 115–146.

[9] С. И. Свинолупов, В. В. Соколов, *ТМФ*, **100**:2 (1994), 214–218.
[10] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *ТМФ*, **125**:3 (2000), 355–424.
[11] С. Я. Старцев, *ТМФ*, **116**:3 (1999), 336–348.
[12] С. Я. Старцев, *ТМФ*, **127**:1 (2001), 63–74.
[13] F. Calogero, "Why are certain nonlinear PDEs both widely applicable and integrable?", *What is Integrability*?, Springer Ser. Nonlinear Dynam., ed. V. E. Zhakharov, Springer, Berlin, 1991, 1–62.
[14] A. I. Zenchuk, P. M. Santini, *On the remarkable relations among PDEs integrable by the inverse spectral transform method, by the method of characteristics and by the Hopf–Cole transformation*, `arXiv: 0801.3945`.
[15] P. M. Santini, *Inverse Problems*, **8**:2 (1992), 285–301.
[16] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
[17] Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррио, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, М., 1988.
[18] В. М. Журавлев, *ЖЭТФ*, **110**:6 (1996), 2243–2262.
[19] В. М. Журавлев, *Нелинейные волны в многокомпонентных системах с дисперсией и диффузией*, Изд. УлГУ, Ульяновск, 2002.
[20] В. М. Журавлев, А. В. Никитин, *Третьи Курдюмовские чтения "Синергетика в естественных науках"*, Материалы межд. междисципл. науч. конф. (Тверь, 19–22 апреля 2007), Тверской гос. ун-т, Тверь, 2007, 60–61.
[21] В. М. Журавлев, А. В. Никитин, *Нелинейный мир*, **5**:9 (2007), 603–611.
[22] В. М. Журавлев, Д. А. Зиновьев, *Письма в ЖЭТФ*, **87**:5 (2008), 314–318.
[23] Б. А. Урюков, *Теплофизика и аэромеханика*, **6**:3 (1999), 421–424.
[24] Э. Скотт, *Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике*, Советское радио, М., 1977.
[25] В. М. Журавлев, *ЖЭТФ*, **129**:3 (2006), 587–604; *Письма в ЖЭТФ*, **75**:1 (2002), 11–16.
[26] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика сплошных сред*, Гостехиздат, М., 1953.
[27] О. В. Руденко, С. И. Солуян, *Теоретические основы нелинейной акустики*, Наука, М., 1975.

Поступила в редакцию 11.09.2007,
после доработки 25.06.2008