УДК 531.01:517.9

Модели автоволновых процессов в средах с диффузией и уравнения типа Лиувилля.

В.М. Журавлев

Ульяновский государственный университет
432700 Ульяновск, Россия
e-mail: zhuravl@sv.uven.ru

Рассматривается задача построения и изучения точных решений моделей автоволновых процессов в средах с диффузией в двумерном и четырехмерном координатных пространствах для некоторых типов нелинейных источников, имеющих тесную связь с уравнением Лиувилля. Показана особая роль уравнения Лиувилля в теории двумерных нелинейных процессов с диффузией. Найдены новые классы точных решений в задачах автоволн в двумерной среде, в том числе, в 4-х-мерном координатном пространстве.

1 Введение.

Одной из наиболее типичных задач теории автоволновых процессов в активных средах с диффузией является задача о распространении волн горения [1, 2]. В общем случае эта задача представляется в виде модели, описывающейся нелинейным уравнением теплопроводности следующего вида ([1, 2])

$$C(T)\frac{\partial}{\partial t}T - \nabla\left(k(T)\nabla T\right) = J(T). \tag{1}$$

Здесь $k(T)$ - коэффициент теплопроводности среды, а $C(T)$ - коэффициент теплоемкости, зависящие от ее температуры $T = T(x, y, t)$, а $J(T)$ - нелинейный источник тепла, так же зависящий от температуры T. В более общем случае, например в случае автоволновых химических реакций [3], динамика модели описывается системой нелинейных уравнений аналогичного вида:

$$C_i(\mathbf{u})\frac{\partial}{\partial t}u_i - \nabla\Big(D_i(\mathbf{u})\nabla u_i\Big) = J_i(\mathbf{u}), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ - вектор параметров состояния среды. Наиболее часто встречающейся формой нелинейности коэффициентов диффузии и источников в таких моделях являются степенные законы:

$$k(T) \sim d_0 T^k, \quad C(T) \sim c_0 T^l, J(T) = j_0 T^s,$$

где k_0, j_0, k, l и s - некоторые вещественные постоянные.

Одним из наиболее эффективных аналитических методов исследования поведения решений уравнений в таких моделях являются автомодельные решения [1, 2]. Обычной формой автомодельных решений, являются стационарные решения со степенной зависимостью от координат и времени, которые описывают одиночные локализованные образования, например, ударные волны или процессы с обострением [2, 4]. Волновые процессы, состоящие из совокупности локализованных возбуждений или процессы близкие к периодическим, например, волны типа ведущий центр, такие методы не дают возможности исследовать.

Для специального класса нелинейных моделей типа (2), так называемых диффузионных цепочек Тоды (ДфЦТ), в работах [5, 6, 7] был найден способ построения достаточно широкого класса точных решений, описывающих волновые состояния активной среды с различными свойствами локализации возбуждений и динамикой близкой к периодической. Основой этого подхода служили решения уравнения Лиувилля и цепочек Тоды в виде квадратичных форм, первоначально найденные в работах [8], и в несколько иной форме в работе [9]. В дальнейшем этот метод был обобщен и распространен на случай многомерных уравнений Лиувилля и цепочек Тоды [10].

В настоящей работе расширяется класс моделей типа ДфЦТ, найденный и иclледованный в [5, 6]. В том числе рассмотрены диффузионные модели в 4-х-мерном координатном пространстве и построены их точные решения. Исследованы некоторые общие свойства этих моделей и их точных решений. Прослежены некоторые важные свойства диффузионных моделей, связанные со свойствами уравнения Лиувилля, в частности, с трансформационными свойствами этого уравнения по отношению к точечным источникам в правой части.

2 Свойства уравнения Лиувилля и его точных решений

Согласно, [9, 5, 6] решения уравнения Лиувилля

$$\Delta\Phi = \Omega e^{-2\Phi}, \tag{3}$$

где Δ - оператор Лапласа в двумерном координатном пространстве, а Ω - вещественная постоянная, могут быть представлены в виде $\Phi = \ln\Psi$, где Ψ - квадратичная форма:

$$\Psi(z, z^*) = a|\psi_1|^2 + b|\psi_2|^2 + c\psi_1\psi_2^* + c^*\psi_1^*\psi_2, \tag{4}$$

относительно аналитических функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ комлексного аргумента $z = x + iy$. Коэффициентами этой квадртичной формы являются вещественные постоянные a и b и комплексная постоянная c, связанные с Ω соотношением: $\Omega = ab - |c|^2$. Функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ могут быть представлены в виде

$$\psi_1(z) = \frac{\phi_1(z)}{\sqrt{W(z)}}, \quad \psi_2(z) = \frac{\phi_2(z)}{\sqrt{W(z)}}, \quad W(z) = \phi_1(z)\frac{\partial}{\partial z}\phi_2(z) - \phi_2(z)\frac{\partial}{\partial z}\phi_1(z), \tag{5}$$

где $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$ - две произвольные линейно-независимые аналитические функции.

Обратим внимание дополнительно на то, что для уравнения Лувилля существует преобразование отображающее множество его решений на себя. Пусть $\Phi(z, z^*)$ - решение уравнения Лиувилля, тогда функция

$$\Phi \to \tilde{\Phi}(z, z^*) = \Phi(\zeta(z), \zeta^*(z^*)) + f(z) + f^*(z^*) \tag{6}$$

при призвольной аналитической функции $f(z)$ и условии

$$\frac{\partial}{\partial z}\zeta = e^{-2f(z)}$$

вновь является решением уравнения Лиувилля.

Еще одним важным, но мало известным свойством уравнения Лиувилля является существование преобразования, связывающего решения этого уравнения без источников с решениями этого уравнения с совокупностью точечных источников. Рассмотрим неоднородное уравнение Лиувилля следующего вида:

$$\Delta\Phi = \Omega e^{-2\Phi} + J(x,y), \tag{7}$$

где в простешем случае $J(x,y) = k\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$, k - вещественная постоянная, а $\delta(x)$ - δ-функция Дирака. Поскольку решение $u(z,z^*)$ в комплексных координатах неоднородного уравнения Лапласа с точечным источником

$$\Delta u_0 = k\delta(x-x_0)\delta(y-y_0), \tag{8}$$

может быть представлено следующим образом (см. [11], с. 333)

$$u_0(z,z^*) = -\frac{k}{2}\ln|z-z_0|^2 = -\frac{k}{2}\left[\ln(z-z_0) + \ln(z^*-z_0^*)\right],$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$. Используя это соотношение для уравнения (7), рассмотрим вспомогательную функцию

$$U = \Phi - u_0.$$

В силу (8) функция U удовлетворяет уравнению

$$\Delta U = \Omega(z-z_0)^k(z^*-z_0^*)^k e^{-2U}.$$

Сделаем замену переменных

$$\zeta(z) = (z-z_0)^{1-k}/(1-k), \quad \zeta^*(z^*) = (z^*-z_0^*)^{1-k}/(1-k), \quad k \neq 1; \tag{9}$$

$$\zeta(z) = \ln(z-z_0), \quad \zeta^*(z^*) = \ln(z^*-z_0^*), \quad k = 1. \tag{10}$$

В результате функция U как функция новых переменных ζ и ζ^* удовлетворяет однородному уравнению Лиувилля (3). Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Существование точечного источника в правой части уравнения Лиувилля эквивалентно точечной неаналитичности функций $\phi_1(z)$, $\phi_2(z)$ либо в точке, где сосредоточен источник (при $k \geq 1$), либо на бесконечности (при $k < 1$). Этот результат обобщается на случай произвольного конечного числа точечных источников в правой части уравнения Лиувилля (7):

$$J(x,y) = \sum_{\alpha=0}^{N} k(\alpha)\delta(x-x_\alpha)\delta(y-y_\alpha).$$

В этом случае расмотрим функцию u_N, удовлетворяющую неоднородному уравнению Лапласа:

$$\Delta u_N = \sum_{\alpha=0}^{N} k(\alpha)\delta(x - x_\alpha)\delta(y - y_\alpha), \tag{11}$$

и которая имеет вид

$$u_N = -\sum_{\alpha=0}^{N} \frac{k(\alpha)}{2} \ln|z - z_\alpha|^2 = -\sum_{\alpha=0}^{N} \frac{k(\alpha)}{2} \left[\ln(z - z_\alpha) + \ln(z^* - z_\alpha^*)\right],$$

где $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$. Тогда функция

$$U = \Phi - u_N$$

как функция координат

$$\zeta(z) = \int \prod_{\alpha=1}^{N} (z - z_\alpha)^{-k(\alpha)} dz, \quad \zeta^*(z^*) = \int \prod_{\alpha=1}^{N} (z^* - z_\alpha^*)^{-k(\alpha)} dz^*$$

удовлетворяет однородному уравнению Лиувилля.

3 Модели с двухмодовым возбуждением и простым условием автономности

Рассмотрим диффузионные уравнения следующего общего вида:

$$C_i(u_i)\frac{\partial}{\partial t}u_i - D_i \Delta \ln u_i = J_i(\mathbf{u}), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{12}$$

среди которых выделим два основных класса:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i - D_i \Delta u_i = F_i(\mathbf{u}), \quad i = 1, \ldots, N; \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i - D_i \Delta \ln u_i = G_i(\mathbf{u}), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{14}$$

Все эти уравнения могут рассматриваться как уравнения многокомпонентной среды с диффузией, состояние которой в каждой точке пространства и времени определяется вектором

$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_N\}$. Первый класс уравнений будем называть уравнениями с линейной диффузией, а второй - с нелинейной диффузией. Для первого класса систем - коэффициент диффузии постоянен для каждого элемента состояния среды, а для второго является функцией данного элемента среды: $D_i u_i^{-1}$. Основная идея использования представления решений уравнений Лиувилля в форме (4) в задача, связанных с автоволнами в двумерных средах с диффузией сводится к следующему.

Рассмотрим набор из N квадратичных форм Ψ_i вида (4), у которых координатные функции ψ_1, ψ_2 и коэффициенты a_i, b_i, c_i являются функциями времени. Введем функции $u_i = \ln\Psi_i$ и рассмотрим действие оператора линейной диффузии на эти функции. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i - D_i\Delta u_i = \frac{1}{\Psi_i^2}\left[\Psi_i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_i - D_i(a_ib_i - |c_i|^2)\right] = e^{-2u_i}\left[e^{u_i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_i - D_i\Big(a_ib_i - |c_i|^2\Big)\right]. \tag{15}$$

Одним из основных требований, которое накладывается на нелинейный источник в теории автоволн, это его автономность, т.е. источник должен зависеть, только от элементов состояния самой среды. Отсюда следует, что, если найти условия автономности правой части последнего тождества, то это тождество можно рассматирвать, как уравнение автоволн с полученным источником в правой части. Не трудно видеть, что условие автономности (15) эквивалентно двум условиям

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_i = \sum_{j=1}^{N} M_{ij}\Psi_j, \quad i = 1, \ldots, N; \tag{16}$$

$$D_i\Big[a_i(t)b_i(t) - |c_i(t)|^2\Big] = \lambda_i = \mathrm{const}, \tag{17}$$

при дополнительном требовании, что коэффициенты матрицы $\mathbf{M} = \{M_{ij}\}$ - постояные. При выполнении этих условий уравнения автоволн в многокомпонентной среде примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i - D_i\Delta u_i = e^{-2u_i}\left[e^{u_i}\sum_{j=1}^{N} M_{ij}e^{u_j} - \lambda_i\right], \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{18}$$

Чтобы получить модели с уравнениями второго типа (14), функции v_i выберем в следующем виде: $v_i = \Psi_i^n$, n - некотрое вещественное число, Ψ_i

- снова квадратичные формы вида (4), коэффициенты которых a_i, b_i, c_i являются функциями времени. Тогда имеем следующее тождество:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}v_i - D_i \Delta \ln v_i = \frac{\partial}{\partial t}\Psi_i^n - D_i n \Delta \ln \Psi_i = \\
&= n\Psi_i^{n-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\Psi_i - D_i(a_i b_i - |c_i|^2)\Psi_i^{-n-1}\right] = \\
&= n v_i^{(n-1)/n}\left[\frac{\partial}{\partial t}\Psi_i - D_i(a_i b_i - |c_i|^2) v_i^{-(n+1)/n}\right].
\end{aligned} \tag{19}$$

Очевидно, условие автономности правой части этого тождества, эквивалентны условиям (16)-(17). Если эти условия выполнены, то уравнения модели будут выглядеть так:

$$\frac{\partial}{\partial t}v_i - D_i \Delta \ln v_i = n v_i^{(n-1)/n}\left[\sum_{j=1}^{N} M_{ij} v_j^{1/n} - \lambda_i v_i^{-(n+1)/n}\right], \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{20}$$

Примеры моделей типа (20) для некоторых значений n приведены ниже:

$$\mathbf{n=1}: \quad \frac{\partial}{\partial t}v_i - D_i \Delta \ln v_i = \left[\sum_{j=1}^{N} M_{ij} v_j - \lambda_i v_i^{-2}\right],$$

$$\mathbf{n=-1}: \quad \frac{\partial}{\partial t}v_i - D_i \Delta \ln v_i = -v_i^{-2}\left[\sum_{j=1}^{N} M_{ij} v_j^{-1} - \lambda_i\right],$$

$$\mathbf{n=-1/2}: \quad \frac{\partial}{\partial t}v_i - D_i \Delta \ln v_i = -\frac{1}{2}v_i^{3}\left[\sum_{j=1}^{N} M_{ij} v_j^{-2} - \lambda_i v_i\right],$$

$$\mathbf{n=1/2}: \quad \frac{\partial}{\partial t}v_i - D_i \Delta \ln v_i = \frac{1}{2}v_i^{-1}\left[\sum_{j=1}^{N} M_{ij} v_j^{2} - \lambda_i v_i^{-3}\right].$$

Пользуясь тем, что при любом n тождества (19) относятся к одной и той же квадратичной форме Ψ_i, можно получить более общий тип модели, чем (20). Действительно, складывая почленно тождества (19), предварительно умножив их на постоянные $a_n = V^{[n]}(0)/n!$, где $V(x)$ - некоторая аналитическая в нуле функция, приходим к следующему тождеству

$$\frac{\partial}{\partial t}V(\Psi_i) - D_i V'(1)\Delta \ln \Psi_i = V'(\Psi_i)\sum_j M_{ij}\Psi_j - l_i V'(1)\Psi_i^{-2}, \tag{21}$$

где l_i и $\mathbf{M}$ - теже, что и в (16) и (17), а $V'(1) = [dV(x)/dx]_{x=1}$. Совокупность тождеств (21), рассматриваемых как уравнения относительно Ψ, представляют наиболее общий класс моделей с "простыми" условиями автономности (16) и (17).

С точки зрения пространственной структуры решений всех рассмотренных в данном разделе моделей основным является их тесная связь с уравнением Лиувилля. В первую очередь важным является то, что как и в случае уравнения Лиувилля пространственная структура решений описывается двумя произвольными аналитическими функциями ϕ_1 и ϕ_2, входящими в определение квадратичной формы Ψ. Это позволяет рассматривать задачи с начальными условиями достаточно общего вида. Кроме этого уравнения этих моделей инвариантны относительно преобразований (6). В свою очередь это определяет возможность преобразования неоднородной системы уравнений со статическими δ-образными источниками к однородной системе уравнений, что имеет место и в случае уравнения Лиувилля.

Как видно центральное место в построении точных решений, рассмотренных моделей, с точки зрения их зависимости от времени занимают условия (16)-(17), а пространственная структура этих решений целиком определяется структурой решений уравнения Лиувилля. Разрешимость системы (16)-(17) при $N = 2$ была рассмотрена в [5], а в [6] были рассмотрены общие принципы построения решений для случая $N > 2$, там же был приведен конкретный пример построения решений для $N = 3$. Заметим, что в случае $N = 1$ условия (16)-(17) приводят лишь к тривиальным решениям. Общее решение системы (16)-(17) сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{w}_i = \sum_{j=1}^{N} M_{ij} w_j$$

Пусть $\mathbf{m}_a = \left\{ m_a^i \right\}$ - собственные вектора матрицы $\mathbf{m}$, соотвествующие собственным числам μ_a (индекс нумерует вектора, а индекс i вверху - векторный индекс). Тогда решения (16) для векторов коэффициентов a_i, b_i, c_i форм Ψ_i можно записать в виде

$$a_i(t) = \sum_{a=1}^{N} m_a^i A_a e^{\mu_a t}, \quad b_i(t) = \sum_{a=1}^{N} m_a^i B_a e^{\mu_a t}, \quad c_i(t) = \sum_{a=1}^{N} m_a^i C_a e^{\mu_a t},$$

где A_a, B_a, C_a - постоянные. Постоянные A_a, B_a, C_a и структура матрицы

$\mathbf{M}$ должны подбираться таким образом, чтобы выполнялись условия (17). При этом требуется, чтобы a_i и b_i были бы вещественными. Эти условия сводятся к решению системы алгебраических уравнений относительно совокупности постоянных A_a, B_a, C_a и элементов собственных вектров m_a^i матрицы $\mathbf{M}$, которые, как известно, образуют унитарную матрицу. Возможность разрешить эту систему в значительной степени определяется кратностью собственных чисел матрицы $\mathbf{M}$. При большей кратности решить эту систему проще.

Существует другой подход к построению решений условий автономности (16),(17). В рамках этого подхода полагаем коэффициенты a_i, b_i, c_i форм не зависящими от времени, а зависимость от времени вводим в координатные функций форм Ψ_i, причем

$$\dot{\psi}_\alpha = \sum_{j=\beta}^{2} \lambda_{\alpha\beta}\psi_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \tag{22}$$

где $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_{ij})$ - некоторая постоянная матрица. Тогда условие (17) выполняется автоматически, а условие (16) сводится к решению системы алгебраических матричных уравнений

$$\mathbf{\Lambda}^* \mathbf{h}_i + \mathbf{h}_j \mathbf{\Lambda} = \sum_{j=1}^{N} M_{ij} \mathbf{h}_j, \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{23}$$

Здесь $\mathbf{h} = (h_{\alpha\beta})$ - матрица коэффициентов квадратичной формы (4): $a_i = h_{11,i}, b = h_{22,i}, c = h_{12,i} = h^*_{21,i}$.

4 Модели со сложными условиями автономности

Заметим, что в [6] обобщенные модели с двухмодовым возбуждением типа (2) не рассматривались. Однако в этой работе рассматривались двухмодовые модели с иными условиями автономности. Вкратце опишем эти модели.

Рассмотрим вместо квадратичной формы (4) форму, аналогичного вида, но в которой функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ определяются не соотношением (5), а соотношением следующего вида

$$W(z) = \psi_1(z)\frac{\partial}{\partial z}\psi_2(z) - \psi_2(z)\frac{\partial}{\partial z}\psi_1(z) = A\psi_1(z) + B\psi_2(z), \tag{24}$$

где A и B - некоторые комплексные постоянные. Тогда, пользуясь тождеством

$$\Delta\Psi = (ab - |c|^2)\frac{|W|^2}{\Psi^2} = (ab - |c|^2)\frac{|A\psi_1 + B\psi_2|^2}{\Psi^2}, \tag{25}$$

выполняющейся для любой формы вида (4), при условии (24), приходим к следующему новому тождеству

$$\frac{\partial}{\partial t}u - D\Delta\ln u = \frac{-\frac{\partial}{\partial t}\Psi + D(ab - |c|^2)(|A\psi_1 + B\psi_2|^2)}{\Psi^2}, \tag{26}$$

где $u = \Psi^{-1}$. Предполагая, что от t зависят только коэффициенты a, b, c формы Ψ, приходим к условиям автономности равой части тождества (26) в форме следующих уравнений:

$$\begin{aligned} &-\dot{a} + D(ab - |c|^2)|A|^2 = \lambda a, \quad -\dot{b} + D(ab - |c|^2)|B|^2 = \lambda b, \\ &-\dot{c} + D(ab - |c|^2)AB^* = \lambda c, \quad -\dot{c}^* + D(ab - |c|^2)A^*B = \lambda c^*, \end{aligned} \tag{27}$$

где λ - некоторая вещественная постоянная. Эти уравнения определяют общую динамику модели.

Уравнение (24) имеет решение

$$\psi_2(z) = \psi_1(z)\left(C\exp\left\{B\theta(z)\right\} - \frac{A}{B}\right) = \psi_1(z)C\eta(z). \tag{28}$$

где $\theta(z) = \int \frac{dz}{\psi_1(z)}$,

$$\eta(z) = \exp\left\{B\theta(z)\right\} - \frac{A}{CB}, \tag{29}$$

а C - постоянная интегрирования.

Такие многокомпонентные модели были более подробно рассмотрены [6], а однокомпонентная модель в [7].

5 Замечания о многомерных моделях

Частично рассмотренный подход к конструированию точно-решаемых моделей нелинейных волн в средах с диффузией, основанный на использовании свойств уравнения Лиувилля, может быть перенесен и на многомерный случай. В работе [10] был предложен метод n-форм к построению точных решений уравнения Лиувилля в многомерных пространствах. В основе этого метода лежит так называемое внедиагональное представление операторов Лапласа и Д'Аламбера. Внедиагональное представление соотвествует такому выбору системы координат, в которой операторы Лапласа и Д'Аламбера содержат в своей координатной записи только смешанные производные [10]. Например, в размерности $d = 3$ оператор Лапласа при выборе комплексных координат

$$z_1 = z + ix, \; z_2 = z + iy, \; z_3 = z - ix, \tag{30}$$

будет иметь внедиагональный вид:

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = 4\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_3} + 2\frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_1} + 2\frac{\partial^2}{\partial z_3 \partial z_2}. \tag{31}$$

В размерности $d = 4$ оператор Лапласа будет иметь более симметричную внедиагональную форму

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_1^*} + 4\frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_2^*} \tag{32}$$

при выборе координат $z_1 = x + iy, z_2 = z + iu, z_1^* = x - iy, z_2^* = z - iu$. Сранение (31) и (32) показывает, что в $d = 3$ координаты, в которых оператор Лапласа внедиагонален, не образуют сопряженные пары, в то время как в случае $d = 4$ образуют. Заметим, что внедиагональная запись в отличие от стандартной диагональной формы оператора Лапласа неоднозначна, однако, указанное свойство сопряженности ($d = 4$) и несопряженности ($d = 3$) систем координат оказывается универсальным по отношению к любым четным и нечетным размерностям. Анализ этого факта приводит к выводу, что строить диффузионные модели в случае нечетномерных пространств по изложенной выше схеме невозможно, в силу того, что n-формы представляющие решение оказываются комплексными. В четномерных пространствах эти же формы могут быть действительными. Фактически это отражает известный факт, что в трехмерном пространстве диффузионные процессы протекают существенно иначе, чем в двумерном. Например, автоволновые структуры в двумерных системах более многообразны. Химические волны, как правило возникают в тонких слоях растворов и т.д. ([3]). Поэтому в качестве примера многомерных моделей диффузии, строящихся на базе уравнения Лиувилля, рассмотрим модели в размерности $d = 4$.

6 Уравнение Лиувилля в пространстве размерности $d = 4$

В начале рассмотрим решения уравнения Лиувилля (3) с оператором (32). Здесь по аналогии с [5, 6] будут рассмотрены решения, для которых Ψ - квадратичная форма следующего вида

$$\Psi(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) = \left(a|\psi_1(\mathbf{Z})|^2 + b|\psi_2(\mathbf{Z})|^2 + c\psi_1(\mathbf{Z})\psi_2(\mathbf{Z}^*)^* + c^*\psi_2(\mathbf{Z})\psi_1(\mathbf{Z}^*)^*\right), \tag{33}$$

где $\psi_1(\mathbf{Z}) = \psi_1(z_1, z_2)$, $\psi_2(\mathbf{Z}) = \psi_2(z_1, z_2)$, $\mathbf{Z} = \{z_1, z_2\}$, $\mathbf{Z}^* = \{z_1^*, z_2^*\}$. Заметим, что в трехмерном случае такое представление невозможно.

Для решений в форме (33) основное тождество (см. [6, 10]) в случае оператора (32) будет выглядеть следующим образом

$$\Delta \ln \Psi = (ab - |c|^2)\Psi^2 \left(|W_1|^2 + |W_2|^2\right). \tag{34}$$

Здесь

$$W_i = \psi_1 \frac{\partial}{\partial z_i}\psi_2 - \psi_2 \frac{\partial}{\partial z_i}\psi_1, \ i = 1, 2.$$

Для того, что бы тождество (34) превращалось в уравнение Лиувилля, (3) достаточно, чтобы имело место равенство:

$$|W_1|^2 + |W_2|^2 = \lambda\Psi = \lambda\left(a|\psi_1|^2 + b|\psi_2|^2 + c\psi_1\psi_2^* + c^*\psi_2\psi_1^*\right) \tag{35}$$

для некоторой постоянной λ и $\Omega = \lambda(ab - |c|^2)$.

Для выполнения (35) достаточно совместного выполнения следующих двух уравнений

$$W_i = \psi_1 \frac{\partial}{\partial z_i}\psi_2 - \psi_2 \frac{\partial}{\partial z_i}\psi_1 = \frac{1}{w}\left(p_i\psi_1 + q_i\psi_2\right), \quad i = 1, 2 \tag{36}$$

и трех алгебраических условий

$$P = \sum_{i=1}^{2} |p_i|^2 = \lambda a, \quad Q = \sum_{i=1}^{2} |q_i|^2 = \lambda b, \quad R = \sum_{i=1}^{2} p_i q_i^* = \lambda c. \tag{37}$$

Уравнения (36) перепишем в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\ln G = \left(\frac{p_i}{\psi_2} + \frac{q_i}{\psi_1}\right), \quad i = 1, 2.$$

где $G(\mathbf{Z}) = \psi_2/\psi_1$. Условия совместности двух уравнений (36) в предположении неколинеарности векторов $\mathbf{p} = \{p_1, p_2\}$ и $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}$ в двумерном комплексном пространстве приводят к требованию, что

$$G(\mathbf{Z}) = G(\xi, \eta), \quad \xi = p_1 z_1 + p_2 z_2, \quad \eta = q_1 z_1 + q_2 z_2,$$

При этом следствием (36) являются два уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{ln} G = \frac{1}{\psi_2}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \mathrm{ln} G = \frac{1}{\psi_1}. \tag{38}$$

Отсюда получаем, что функция G должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \eta} G = G \frac{\partial}{\partial \xi} G. \tag{39}$$

Это уравнение в случае действительных координат (в данном случае ξ и η - комплексные) носит название уравнения Хопфа и возникает в ряде задач математической физики, например, в задачах возникновения ударaных волн в недиспергирующей идеальной среде. Однако в комплексных координатах это уравнение эквивалентно системе двух вещественных уравнений гидродинамического типа и имеет существенно иные свойства, чем действительное уравнение Хопфа.

Общее решение этого уравнения может быть представлено в неявном виде

$$\Theta(G, \eta G + \xi) = \Theta_0 = const, \tag{40}$$

где $\Theta(u, v)$ дифференцируемая функция двух комплексных аргументов ($u = G$, $v = \eta G + \xi$), а Θ_0 - комплексная постоянная, которые определяются из начальных условий. Действительно, дифференцируя (40) по η и ξ, получаем два уравнения

$$\Theta_u \frac{\partial}{\partial \eta} G + \Theta_v \left(G + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} G \right) = 0,$$
$$\Theta_u \frac{\partial}{\partial \xi} G + \Theta_v \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial \xi} G \right) = 0.$$

Условием совместности этих двух уравнений является (39).

Если решение для G найдено, то функции ψ_1 и ψ_2 вычисляются по формулам

$$\psi_1 = \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \mathrm{ln} G \right]^{-1}, \quad \psi_2 = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{ln} G \right]^{-1}. \tag{41}$$

Сравнивая полученные решения с решениями найденными в [6, 10], можно обнаружить принципиально иной характер решений (41). Почти все нетривиальные решения уравнения (39) являются во вспомогательных комплексных координатах многозначными. Многозначность может приводить к существенному усложнению топологической структуры решений. Решения такого типа являются новым классом объектов, возникающих в многомерных волновых системах. В двумерных задачах такие структуры в решениях уравнений для аналогичных по форме нелинейности моделей не обнаруживаются (см. [6]). В связи с этим существенным является анализ этих решений после их редукции к действительным координатам. Особо отметим, что редукция к действительным координатам не приводит к вырождению решений в смысле, того что они будут зависеть только от двух действительных коодинатных переменных (вместо четырех x, y, z, u) или их комбинаций. Кроме этого, сама по себе многозначность функции G еще не означает многозначности действительных решений (33) с функциями (41) для уравнения Лиувилля (3), удовлетворяющих заданным граничным условиям. Последнее было бы неизбежным, если бы функция G описывалась уравнением Хопфа в действительных координатах. Вместе с тем неоднозначность G требует дополнительного анализа полученных решений по отношению к их устойчивости. Можно предположить, что вблизи точек ветвления функции G многолистные решения легко теряют устойчивость и соответствующие автоволновые возмущения, рассматриваемые ниже, разрушаются или резко меняют свою пространственную структуру. Обратим внимание на то, что уравнение (39) принадлежит к уравнениям гидродинамического типа. Специфические решения уравнений Лиувилля, строящиеся с помощью вспомогательной системы уравнений гидродинамического типа, но не сводящейся к (39), были недавно найдены в работах [12]. Комплексные уравнения типа (39) встречаются также в нелинейной электродинамике и алгебродинаике [13]. Это указывает на то, что системы гидродинамического типа, аналогичные (39), являются достаточно универсальным явлением в структуре решений различного рода многомерных нелинейных физических задач и играют в них важную роль. В связи с этим найденные многолистные решения также следует рассматривать как достаточно общее явление при переходе к многомерным волновым процессам.

В качестве простого примера из класса полученных решений приведем одно из них, соответствующее следующему выбору функции Θ:

$$gG^2 + h\Big(\eta G + \xi\Big)^2 = \Theta_0,$$

где g, h, Θ_0 - произвольные комплексные постоянные. Приводя последнее соотношение к виду:

$$(g + h\eta^2)G^2 + 2h\eta\xi G + h\xi^2 - \Theta_0 = 0,$$

находим двухлистное решение

$$G_{\pm}(\xi,\eta) = -\frac{h\eta\xi \pm \sqrt{\Theta_0(g + h\eta^2) - h\xi^2}}{g + h\eta^2}.$$

Это простейшее решение для G после подстановки в (41) и затем в (33) приводит к достаточно громоздким выражениям для Φ, детальное исследование которых представляет собой отдельную проблему, поэтому здесь такой анализ проводится не будет. Отметим лишь то, что листы пересекаются вдоль многообразия, задаваемого двумя действительными уравнениями

$$\mathrm{Re}\Big\{h(\xi^2 - \Theta_0\eta^2) - \Theta_0 g\Big\} = 0, \quad \mathrm{Im}\Big\{h(\xi^2 - \Theta_0\eta^2) - \Theta_0 g\Big\} = 0.$$

Поскольку ξ и η - линейные функции координат x, y, z, u, то последние два уравнения представляют собой уравнения квадратичных поверхностей в трехмерном действительном пространстве. Эти уравнения определяют положение особенностей в структуре решений, которые в случае сингулярного характера этих особенностей в решении должны порождаться дополнительными сингулярными источниками в правой части (3).

7 Диффузионные модели

Применим полученный результат к моделям типа ДфЦТ. Рассмотрим два основных типа моделей (см. [6]), описывающихся общей системой уравнений следующего типа:

$$\frac{\partial}{\partial t}N_i^{(\alpha)} = D_i\Delta\Phi_i + F_i^{(\alpha)}(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N), \quad i = 1, \ldots, N,$$

где для моделей первого типа (нелинейная диффузия), соответствующих $\alpha = 1$:

$$N_i^{(1)} = \Psi_i^{-1},\ \Phi_i = \ln\Psi_i.$$

а для моделей второго типа (линейная диффузия) с $\alpha = 2$:

$$N_i^{(2)} = \Phi_i = \ln\Psi_i.$$

В обеих моделях решения уравнений по аналогии с [5, 6] Ψ_i являются квадратичными формами вида (33) с зависящими от времени коэффициентами $a_i(t), b_i(t), c_i(t)$:

$$\Psi_i(t, \mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) = a_i(t)|\psi_1(\mathbf{Z})|^2 + b_i(t)|\psi_2(\mathbf{Z})|^2 + c_i(t)\psi_1(\mathbf{Z})\psi_2(\mathbf{Z}^*)^* + c_i^*(t)\psi_2(\mathbf{Z})\psi_1(\mathbf{Z}^*)^*, \tag{42}$$

где $\psi_1(\mathbf{Z}) = \psi_1(z_1, z_2)$, $\psi_2(\mathbf{Z}) = \psi_2(z_1, z_2)$ по-прежнему от времени не зависят.

В случае моделей первого типа, используя тождества (34) и условия (36), получаем следующую систему уравнений для коэффициентов квадратичной формы, как функций времени

$$\dot{a}_i = \sum_{j=1}^{N} m_{ij} a_j + (a_i b_i - |c_i|^2)P, \quad \dot{b}_i = \sum_{j=1}^{N} m_{ij} b_j + (a_i b_i - |c_i|^2)Q,$$
$$\dot{c}_i = \sum_{j=1}^{N} m_{ij} c_j + (a_i b_i - |c_i|^2)R, \quad \dot{c}_i^* = \sum_{j=1}^{N} m_{ij} c_j^* + (a_i b_i - |c_i|^2)R^*.$$

Здесь постоянные P, Q, R определены в соотношениями (37). В этом случае сами уравнения ДфЦТ можно привести к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i = -D_i \Delta \ln u_i + u_i^2 \sum_{j=1}^{N} m_{ij} u_j^{-1}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{43}$$

где $u_i = \Phi_i^{-1}$. В такой форме система (43) представляет собой уравнения моделей типа "реакция-диффузия" с нелинейными коэффициентами диффузии $K_i = -D_i u_i^{-1}$.

В случае моделей второго типа система уравнений на коэффициенты квадратичной формы будет иметь следующий вид

$$\dot{a}_i = \sum_{j=1}^{N} m_{ij} a_j, \quad \dot{b}_i = \sum_{j=1}^{N} m_{ij} b_j, \quad \dot{c}_i = \sum_{j=1}^{N} m_{ij} c_j, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Эти уравнения необходимо дополнить N условиями:

$$a_i b_i - |c_i|^2 = l_i = \mathrm{const}, \quad i = 1, \ldots, N \tag{44}$$

и условием, что матрица m_{ij} должна иметь хотя бы одно нулевое собственное значение, т.е. должен существовать такой вектор $\mathbf{w}$ с компонентами w_i такой, что

$$\sum_{j=1}^{N} w_j m_{ji} = 0.$$

Уравнения ДфЦТ для этого типа моделей таковы:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_i = D_i \Delta \Phi_i + \sum_{j=1}^{N} m_{ij} e^{\Phi_j - 2\Phi_i} + \lambda_i e^{-\Phi_0}, \quad i = 0, \ldots, N$$

и представляют собой систему уравнений моделей "реакция-диффузия" с линейным коэффициентом диффузии.

Динамика моделей второго типа описывается линейными уравнениями с дополнительной нелинейной связью. Решения этой системы были рассмотрены в [5, 6]. Динамика же моделей первого типа существенно иная по сравнению с двумерным случаем, рассмотренным в [6]. Введем следующие вспомогательные функции

$$\delta_i(t) = \frac{1}{Q} b_i(t) - \frac{1}{P} a_i(t), \quad \theta_i(t) = \frac{1}{R} c_i(t) - \frac{1}{P} a_i(t), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{45}$$

Эти функции удовлетворяют линейным уравнениям с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta_i = \sum_{j=1}^{N} m_{ij}\delta_j, \quad \frac{\partial}{\partial t}\theta_i = \sum_{j=1}^{N} m_{ij}\theta_j, \tag{46}$$

построить решение которых не составляет труда. Из уравнений для a_i поэтому можно исключить b_i и c_i. В результате получаем

$$\dot{a}_i = \sum_{j=1}^{N} m_{ij} a_j - \Big[PQ\delta_i - |R|^2(\theta_i + \theta_i^*)\Big] a_i + \frac{QP - |R|^2}{P} a_i^2 - |R|^2 P |\theta_i|^2, \; i = 1, \ldots, N. \tag{47}$$

В качестве простого примера можно рассмотреть случай однокомпонентной системы типа (43). Уравнение этого типа встречается в ряде задач нелинейной гидродинамики (см. например, [14]). В этом случае уравнение (47) линеаризуется подстановкой

$$a = a_1 = \alpha \frac{\partial}{\partial t} \ln v(t), \quad \alpha = \frac{P}{QP - |R|^2}. \tag{48}$$

Имеем

$$\ddot{v} - \Big[m + PQ\delta(t) - |R|^2(\theta(t) + \theta^*(t))\Big]\dot{v} - |R|^2(QP - |R|^2)|\theta(t)|^2 v = 0.$$

Здесь в соответствие с (46) $\theta(t) = \theta_1(t) = le^{mt}$, $\delta(t) = \delta_1(t) = ke^{mt}$, где l - комплексная, а k - действительная постоянная. Если ввести теперь новую переменную $\tau = e^{mt}$, то последнее уравнение сведется к уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2V}{d\tau^2} - A\frac{dV}{d\tau} - \frac{B}{m}V = 0,$$

где

$$A = \frac{PQk - |R|^2(l + l^*)}{m}, \quad B = \frac{|R|^2(QP - |R|^2)|l|^2}{m}.$$

Последнее уравнение интегрируется без труда. В совокупности соотношения (45) и (48) дают полное решение задачи о динамике решений уравнения (43) в случае $N = 1$. В случае произвольной размерности модели $N > 1$ уравнения (47) не линеаризуются, что указывает на существенное усложнение динамики таких систем уже в случае $N = 2$.

8 Заключение

Таким образом, в работе построены новые классы многокомпонентных моделей типа “реакция-диффузия” в двумерном и трехмерном координатном пространстве, допускающие точные нестационарные решения волнового типа. Найденные в явном виде классы таких точных решений уравнений Лиувилля и моделей типа ДфЦТ, которые содержат топологические особенности или дефекты, которые, повидимому, являются важным отличительным признаком трехмерных и вообще многомерных волновых структур и автоволн. Опираясь на полученные здесь и в [10] результаты, можно также утверждать, что предложенный подход может без существенных изменений перенесен на задачи с координатной размерностью выше, чем $3 + 1$. Решения с топологическими дефектами будут при этом возникать и в моделях с высшими размерностями.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект N 00-01-00260).

Список литературы

[1] В.А.Васильев,Ю.М.Романовский,В.Г.Яхно., Автоволновые процессы. (Под ред. Д.С.Чернавского) М.:Наука, 1987

[2] Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. (Идеи. Методы. Примеры). М.: Наука, 1997

[3] Жаботинский А.М.. Концентрационные автоколебания. М.: Наука, (1974).

[4] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987

[5] Журавлев В.М. Об одном классе моделей автоволн в активных средах с диффузией, допускающих точные решения. // Письма в ЖЭТФ, 1997, Т. 65, в. 3, С.285.

[6] Журавлев В.М. Диффузионные цепочки Тоды в моделях нелинейных волн в активных средах. // ЖЭТФ, 1998, Т. 114, в. 6.

[7] Журавлев В.М. Точные решения уравнения нелинейной диффузии $u_t = \Delta \ln u + \lambda u$ в двумерном координатном пространстве. // ТМФ, 2000, Т. 124, N. 2, С. 265-278.

[8] Lesnov A., Savel'ev M.// Physica 3D, 1981, p. 6272; Лезнов А.Н., Савельев М.В. *Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем.* М.:Наука, 1985.

[9] Журавлев В.М. О новом представлении двумерных уравнений динамики несжимаемой жидкости. // ПММ, 1994. Т.58. N 6. С. 61.

[10] Журавлев В.М. Точные решения уравнения Лиувилля в многомерных пространствах. // ТМФ, 1999, Т. 120, N. 1, С. 3-19.

[11] Тихонов А.Н.,Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.:Наука, 1972

[12] Leznov A.N., math-ph/9908012,math-ph/9908013;
D.B. Fairle, A.N. Leznov, solv-int/9909011-9909014;

[13] Кассандров В.В., Алгебраическая структура пространства-времени и алгебродинамика. М.: Изд. РУДН (1992)

[14] Аристов С.Н., ПМТФ, **40**, N1, 22 (1999);
Пухначев В.В., ПМТФ, **36**, N2, 23 (1995).