

**ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ СЖИМАЕМОЙ  
СРЕДЫ В СОБСТВЕННОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ.  
МЕТОД ПОДСТАНОВОК КОУЛА – ХОПФА<sup>1</sup>**

*Аннотация.* На основе модификации метода обобщенных подстановок Коула – Хопфа строятся точные решения самосогласованной задачи динамики сжимаемой среды в собственном поле тяготения. Рассматриваются различные модели одномерного течения идеальной и вязкой самогравитирующей среды для общего вида начальных распределений ее плотности и скорости. Вычисляются интегралы движения и обобщенные подстановки Коула – Хопфа, позволяющие строить точные решения. Метод построения точных решений обобщается для идеальной среды в собственном поле тяготения на двумерные и трехмерные течения, обладающие цилиндрической и сферической симметриями. На основе построенных решений анализируются процессы формирования плотных объектов из пылевого облака с заданным начальным распределением плотности пыли вследствие неустойчивости Релея – Джинса для плоской и сферической симметрий. Вычисляется характерное время до образования сингулярности.

*Ключевые слова:* нелинейные уравнения, самогравитирующие среды, точно интегрируемые модели.

*Abstract.* The exact solutions of the self-coordinated problem of dynamics of the compressible fluid in self-gravitational field are developed by the authors on the basis of modifications to the Cole – Hopf generalized substitutions method. The article considers various models of a one-dimensional flow of the ideal and viscous self-gravitating fluid for the general view of initial distributions of its density and velocity. The authors calculate the integrals of movement and generalized Cole – Hopf substitutions, allowing to construct exact decisions. The method of construction of exact solutions is generalized for the ideal fluid in self-gravitational field on the two-dimensional and three-dimensional flows possessing cylindrical and spherical symmetry. The article analyzes the processes of formation of dense objects from a dust cloud with the set initial distribution of density of dust owing to Jeanse’s instability for flat and spherical symmetry on the basis of the constructed decisions. The researchers also calculate the characteristic time before singularity formation.

*Key words:* non-linear equations, self-gravitating fluids, exactly integrated models.

**Введение**

Исследования уравнения Бюргерса [1] одномерного течения вязкой жидкости и конструктивное доказательство его полной интегрируемости с помощью подстановки, открытой Коулом и Хопфом [2, 3], можно считать важным результатом в гидродинамике и математической физике середины

---

<sup>1</sup> Настоящая работа выполнена в рамках федеральных целевых программ «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно технологического комплекса России на 2007–2012 годы» и «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы», а также работ в рамках государственного задания Минобрнауки России № 2.1894.2011 и при частичной поддержке РФФИ (проекты 11-01-00747-а, 12-01-00660-а).

XX в. Этот результат позволил разобраться с тем, как эволюционируют волны в вязкой среде с учетом нелинейности и понять, во что превращаются разрывные течения идеальной жидкости при учете вязкости [4]. Кроме этого, открытие подстановки Коула – Хопфа подтолкнуло (возможно не сразу [4]) к поискам методов точного интегрирования нелинейных уравнений в частных производных, что, в конце концов, вылилось в создание метода обратной задачи (МОЗ) в различных его формулировках (см. [5–7] и библиографию там) и целого ряда других методов в этой области.

К настоящему времени известно сравнительно небольшое количество точных решений уравнений Эйлера и Навье – Стокса [8, 9] для течений сжимаемой жидкости в двумерном и трехмерном случае, которые могут служить базой для решения конкретных прикладных задач. Поэтому при решении большинства прикладных задач гидродинамики приоритет отдается численным моделям динамики жидкости. Однако численные методы часто не дают возможности понять внутреннюю природу получаемых решений, поскольку процесс появления сложного решения оказывается скрыт от исследователя ненаблюдаемым потоком огромного числа простых математических операций. В этом потоке теряется физический смысл того, что происходит реально в системе, что, по всей видимости, не приближает нас к цельному пониманию гидродинамических процессов, особенно в случае течений сжимаемой жидкости. В связи с этим поиски методов построения точных решений уравнений Эйлера и Навье – Стокса, вне зависимости от развития методов численного их анализа, будут оставаться одним из важных направлений исследования в гидромеханике и математической физике в целом (см., например, [10, 11] и библиографию там).

Часто точные решения гидродинамических уравнений строятся на основе параметризации некоторого класса течений, исходя из каких-либо симметричных условий или аналитических свойств функций, входящих в параметризацию. Такой подход особенно эффективен в случае двумерных течений несжимаемой жидкости, для которых можно ввести функцию тока [8, 9] и использовать в явном виде дифференциальные законы сохранения. В трехмерном случае методы параметризации иные, но по сути сводятся к аналогичным методам (например, [10, 11]).

Для задач динамики идеальной сжимаемой среды одним из основных методов получения точной информации о решениях, в том числе и методов построения самих точных решений, является метод годографа и некоторые другие аналогичные методы (см. [12]). Однако эти методы позволяют получать решения в специфической форме зависимости координат и времени от параметров потока жидкости, что затрудняет их интерпретацию и построение решений начальных и краевых задач.

В качестве альтернативного подхода в работах [13–15] был предложен метод обобщенных подстановок Коула – Хопфа. В отличие от метода преобразования годографа метод, основанный на обобщенных подстановках Коула – Хопфа, позволяет строить решения либо в явном виде, либо в форме интеграла движения, задающего решение в неявной форме, но приспособленной для задания начальных условий для параметров среды.

Обобщение этого подхода было использовано в работах [13–15] для построения точных решений уравнений Эйлера и Навье – Стокса сжимаемой

жидкости для одномерных течений. А в работе [16] в частном случае квазипотенциальных течений аналогичный результат был получен для двумерных течений идеальной жидкости. В работе [17] был предложен еще один вариант построения аналитических решений уравнений Навье – Стокса и Эйлера на основе специальной подстановки Коула – Хопфа. Эти результаты для одномерных течений интерпретируются с несколько иных позиций, что позволяет получить еще более обобщенный результат, чем в [14, 15]. Теоретические основы приложения подхода, развитого в [17], к задачам одномерной динамики были частично исследованы в работе [18]. В настоящей работе эти результаты обобщаются и применяется к задаче построения аналитических решений течений самогравитирующей жидкости как для идеальной, так и для вязкой жидкости. На их основе анализируются решения, описывающие формирование структур в пылевых облаках вследствие неустойчивости Релея – Джинса для различных начальных конфигураций. Построение таких решений имеет важное значение для ряда задач астрофизики и космологии (см. [19] и библиографию там).

### **1. Обобщенные подстановки для уравнений сжимаемой жидкости**

Из работы [17] следует, что параметризация одномерных течений может быть построена следующим образом. Рассмотрим представление для скорости  $u(x, t)$  потока в следующем виде:

$$u(x, t) = -\frac{\theta_t}{\theta_x}, \quad (1)$$

где  $\theta = \theta(x, t)$  - некоторая вспомогательная функция. Эквивалентная запись этого соотношения имеет вид уравнения переноса изолиний функции  $\theta(x, t)$ :

$$\theta_t + u(x, t)\theta_x = 0. \quad (2)$$

Из (2) следует несколько простых тождеств, выполняющихся для любой дифференцируемой функции  $\theta(x, t)$ . Первое тождество имеет следующий вид:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \right] F(\theta) = F'(\theta)(\theta_t + u\theta_x) = 0. \quad (3)$$

Еще одно тождество можно получить, дифференцируя его по  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta_x + \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t)\theta_x) = 0.$$

Это соотношение принимает форму уравнения неразрывности, если в качестве плотности жидкости  $\rho(x, t)$  рассматривать величину

$$\rho(x, t) = \theta_x. \quad (4)$$

В этом случае

$$\rho_t + \frac{\partial}{\partial x} (u\rho) = 0. \quad (5)$$

Представим (5) в следующем виде:

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = -u_x, \quad (6)$$

и продифференцируем его по  $x$ . Полученное соотношение можно записать так:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \ln(\rho)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x).$$

Это соотношение также является тождеством, выполняющимся для произвольной функции  $\theta(x,t)$ .

Воспользуемся произволом в выборе функции  $\theta$  при записи полученных тождеств. Потребуем выполнения равенства

$$u(x,t) = F(\theta) - v \frac{\partial \ln(\rho)}{\partial x}, \quad (7)$$

где  $F(\theta)$  – произвольная функция  $\theta$ . Это дополнительное требование эквивалентно уравнению для функции  $\theta$  следующего вида:

$$\theta_t + F(\theta)\theta_x = v\theta_{xx}, \quad (8)$$

которое получается из (7) подстановкой в него определения (1). Если  $\theta$  удовлетворяет уравнению (8), то функция  $u(x,t)$  удовлетворяет уравнению Бюргера для сжимаемой жидкости:

$$u_t + uu_x = v \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x), \quad (9)$$

причем плотность  $\rho = \theta_x$  удовлетворяет уравнению неразрывности (5).

Следовательно, функции  $u(x,t)$  и  $\rho(x,t)$  при условии, что функция  $\theta$  удовлетворяет уравнению (8), представляют точные решения задачи об одномерном течении вязкой сжимаемой жидкости при нулевых внешних силах и градиенте давления при условии сохранения ее массы.

Решения системы уравнений (5) и (9) строятся в виде подстановок (7) (или (1)) для скорости и (4) для плотности, в которых функция  $\theta(x,t)$  – любое точное решение уравнения (8) при заданной функции  $F(\theta)$ . Наличие в схеме построения решений произвольной функции ставит вопрос о том, каким образом данная функция связана с начальными и граничными условиями. Анализ самих подстановок для скорости и плотности показывает, что вид функции  $F(\theta)$  и сами полученные решения могут быть связаны с начальными условиями произвольного вида в распределении плотности и скорости жидкости в момент времени  $t = 0$ . Из (7) и (4) имеем:

$$\rho(x,0) = \frac{\partial \theta_0(x)}{\partial x}; \quad (10)$$

$$u(x,0) = u_0(x) = F(\theta_0(x)) - v \frac{\partial \ln \theta_0(x)}{\partial x}, \quad (11)$$

где  $\theta_0(x) = \theta(x, 0)$  – начальное условие для функции  $\theta(x, t)$ .

Явный вид функции  $F(\theta)$ , как видно, определяется начальным распределением скорости течения и плотности.

## 2. Одномерные течения самогравитирующей жидкости

Рассмотрим теперь одномерное течение вязкой жидкости в собственном поле тяготения без градиента давления. Уравнения таких течений должны удовлетворять трем уравнениям:

$$u_t + uu_x = \nu \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) - \varphi_x; \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0; \quad (12)$$

$$\varphi_{xx} = 4\pi G \rho. \quad (13)$$

Здесь  $\varphi$  – потенциал гравитационного поля;  $G$  – гравитационная постоянная. Воспользуемся представлением для скорости (1) и плотности (4). В результате уравнение (13) примет следующий вид:

$$\varphi_{xx} = 4\pi G \theta_x.$$

Интегрируя это уравнение по  $x$ , находим

$$\varphi_x = 4\pi G \theta + g_0(t). \quad (14)$$

Подставляя это выражение в (12) и умножая его на  $\rho$ , получаем

$$\rho(u_t + uu_x) = \nu \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) - \rho \varphi_x. \quad (15)$$

Для того чтобы получить это уравнение из тождеств (3) и (6), потребуем выполнения соотношения

$$u = F(\theta) - \nu \frac{\partial \ln(\rho)}{\partial x} - t 4\pi G \theta - v_0(t), \quad (16)$$

где

$$v_0(t) = \int g_0(t) dt.$$

Используя, тождество

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) (t 4\pi G \theta + v_0(t)) = 4\pi G \theta + \dot{c}(t),$$

получаем, что функция  $u(x, t)$  (16) удовлетворяет уравнению (15) при условии, что функция  $\theta$  удовлетворяет уравнению

$$\theta_t + F(\theta) \theta_x = \nu \theta_{xx} + 4\pi G t \theta \theta_x + v_0(t) \theta_x \quad (17)$$

с произвольной функцией  $F(\theta)$ .

Полученное уравнение демонстрирует роль гравитации в динамике плоских волн в самогравитирующей пылевой среде, которая, как видно, соответствует появлению специфической нелинейности в уравнении (17) и специфической зависимости решений от времени.

Полученное представление решений исходной системы уравнений является полным в том смысле, что с его помощью есть возможность в принципе строить решения произвольной начальной задачи, которые определяются начальными условиями в виде двух произвольных функций  $\rho_0(x) = \rho(x, 0)$  и  $u_0(x) = u(x, 0)$  – начальными распределениями плотности и скорости в момент времени  $t = 0$ . Процедура вычисления функции  $F(\theta)$  остается аналогичной той, которая была описана в предыдущем разделе и сводится к системе алгебраических уравнений:

$$\theta_0(x) = \theta(x, 0) = \int \rho(x, 0) dx, \quad F(\theta_0(x)) = u(x, 0) + v \frac{\partial \ln(\rho(x, 0))}{\partial x} + v_0(0). \quad (18)$$

В силу неотрицательности плотности вывод об однозначности вычисления  $F(\theta)$  здесь также остается в силе.

### 3. Сферические и цилиндрические волны в самогравитирующей жидкости

Развитый подход может быть использован для построения точных решений в задаче о динамике самогравитирующей пыли в трехмерном пространстве при наличии цилиндрической или сферической симметрии. Уравнения сферически и цилиндрически симметричных течений идеальной сжимаемой жидкости в собственном поле тяготения можно записать в следующем виде:

$$u_t + uu_r = -\varphi_r; \quad \rho_t + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r}(r^n \rho u) = 0; \quad (19)$$

$$\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r}(r^n \varphi_r) = 4\pi G \rho. \quad (20)$$

Здесь  $n = 1$  для цилиндрической симметрии и  $n = 2$  – для сферической, а  $r$  – соответствующая радиальная координата. Введем вспомогательную функцию  $\rho = r^n \rho$ . В этом случае уравнения (19)–(20) можно переписать таким образом:

$$u_t + uu_r = -\varphi_r; \quad \rho_t + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u) = 0; \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^n \varphi_r) = 4\pi G \rho. \quad (22)$$

Используя исходную параметризацию скорости  $u(r, t) = -\theta_t / \theta_r$  (с заменой  $x$  на  $r$ ) и вспомогательной функции  $\rho$  в форме  $\rho = \theta_r$ , уравнение Пуассона (22) приведем к следующему виду:

$$\varphi_r = \frac{1}{r^n} 4\pi G \theta + g_0(t), \quad (23)$$

здесь  $g_0(t)$  – произвольная функция времени, как и в одномерном случае, связанная с ускорением свободного падения на границе области, например

при  $r \rightarrow \infty$ . В этом случае уравнение неразрывности выполняется тождественно, а уравнение для радиальной скорости примет такой вид:

$$u_t + uu_r = -\frac{4\pi G}{r^n} \theta - g_0(t). \quad (24)$$

По аналогии с одномерной моделью на полупрямой введем следующее условие для скорости радиального потока  $u(r, t)$ :

$$u = f(r)Q(\theta) + v_0(t), \quad (25)$$

где  $v_0(t)$ ,  $f(r)$  и  $Q(\theta)$  – некоторые пока произвольные функции. Используя основные тождества, получаем

$$u_t + uu_r = f'(r)Q(\theta)u = f'(r)f(r)Q^2(\theta) + \dot{v}_0.$$

Сравнивая это соотношение с (23), получаем:

$$Q^2(\theta) = 4\pi G\theta, \quad f(r)f'(r) = -r^{-n}, \quad \dot{v}_0 = g_0(t),$$

или

$$Q(\theta) = \sqrt{4\pi G}\sqrt{\theta}, \quad v_0(t) = \int g_0(t)dt \quad f(r) = \pm \begin{cases} \sqrt{2}\sqrt{r_0^{-1} + r^{-1}}, & n = 2, \\ \sqrt{2}\sqrt{\ln r_0 - \ln r}, & n = 1. \end{cases}$$

Здесь  $r_0$  – постоянная интегрирования.

Отсюда следует, что сферическая волна в сжимаемой самогравитирующей среде без градиента давления описывается соотношениями

$$\rho = \frac{1}{r^2}\theta_r, \quad u = -\theta_t / \theta_r = \pm\sqrt{8\pi G}\sqrt{r_0^{-1} + r^{-1}}\sqrt{\theta} + v_0(t) \quad (26)$$

при условии, что функция  $\theta$  удовлетворяет уравнению

$$\theta_t + (v_0(t) \pm \sqrt{8\pi G}\sqrt{r_0^{-1} + r^{-1}}\sqrt{\theta})\theta_r = 0. \quad (27)$$

Соответственно цилиндрическая волна в сжимаемой самогравитирующей системе описывается соотношениями

$$\rho = \frac{1}{r}\theta_r, \quad u = -\theta_t / \theta_r = \pm\sqrt{8\pi G}\sqrt{\theta}\sqrt{f_0 - \ln r} + v_0(t) \quad (28)$$

с функцией  $\theta$ , удовлетворяющей уравнению

$$\theta_t + (v_0(t) \pm \sqrt{8\pi G}\sqrt{\ln r_0 - \ln r}\sqrt{\theta})\theta_r = 0. \quad (29)$$

Построенные модели для цилиндрического и сферического случая отличаются друг от друга важной особенностью. Если в цилиндрическом случае построенная модель, как и в одномерном плоском течении, дает описание течений на ограниченном интервале значений радиальной координаты  $[0, r_0]$ , то аналогичная модель для сферического случая при  $r_0 \geq 0$  дает описание на всем пространстве. Конечность интервала

вещественности в цилиндрической модели означает наличие цилиндрической стенки, на которой скорость потока обращается в ноль (при  $v_0 = 0$ ). Это ограничивает возможность применять модель с  $n = 1$  для астрофизических задач. Однако модель с  $n = 2$  свободна от этого недостатка. Как и в плоском случае, динамика среды, движущейся к началу координат и от него, описывается разными моделями, при этом начальное распределение скорости в этих моделях произвольное и связано с начальным распределением плотности среды.

Распределение плотности  $\rho_0(r) = \rho(r, 0)$  задает начальное распределение функции  $\theta_0(r) = \theta(r, 0)$ . Эта функция должна быть всюду неотрицательной и монотонно неубывающей с ростом  $r$ . Кроме этого, при выборе начального распределения  $\rho$  следует учитывать, что в отсутствие сингулярности плотности в начале координат необходимо требование  $\lim_{r \rightarrow 0} \theta_r = r^n$ .

#### 4. Точные решения одномерных уравнений течений идеальной жидкости

В случае отсутствия вязкости система уравнений (12)–(13) допускает интеграл движения, позволяющий строить решения в неявной форме для произвольных начальных распределений плотности и скорости. Этот интеграл движения имеет следующий общий вид:

$$H(\theta, x - X(\theta, t)) = 0, \quad (30)$$

где  $H = H(\theta, \eta)$  – произвольная дифференцируемая функция двух аргументов ( $\theta$  и  $\eta = x - X(\theta, t)$ ). Функция  $X(\theta, t)$  для рассматриваемого случая имеет следующий вид:

$$X(\theta, t) = F(\theta)t - 2\pi Gt^2\theta - \int v_0(t)dt. \quad (31)$$

Прямой проверкой убеждаемся, что функция  $\theta$ , удовлетворяющая алгебраическому уравнению (30), также удовлетворяет уравнению

$$\theta_t + \frac{\partial X(\theta, t)}{\partial t} \theta_x = 0, \quad (32)$$

которое эквивалентно (17) при  $v = 0$

$$\theta_t + (F(\theta) - 4\pi Gt\theta - v_0(t))\theta_x = 0 \quad (33)$$

для  $X(\theta, t)$ , определенного в (31).

Уравнение (33) (как и общее уравнение (32)) является уравнением простой волны и имеет многозначные решения, указывающие на обрушение волн и образование ударных волн в среде, динамику которой оно описывает. Как и в случае вязкой среды, наличие двух произвольных функций  $H(\theta, \eta)$  и  $F(\theta)$  позволяет формально строить решения задачи о динамике сжимаемой среды с нулевым давлением для произвольных начальных распределений ее плотности и скорости. Процедура вычисления  $F(\theta)$  остается прежней, а вид функции  $H(\theta, \xi)$  вычисляется из начального распределения плотности.



### 5. Джинсовская неустойчивость в одномерном случае

Полученные решения позволяют на точных решениях рассмотреть динамику локальных возмущений плотности под действием собственного поля тяготения в одномерном случае. Эта задача о джинсовской неустойчивости самогравитирующей среды важна для описания динамики крупномасштабной структуры Вселенной, как это уже объяснялось во введении. При анализе формирования крупномасштабной структуры предполагают, что точками среды являются галактики. При этом давление в такой среде равно нулю, что соответствует уравнению состояния пыли  $p = 0$ . Кроме этого, вязким трением в такой среде можно пренебречь. В результате динамика таких систем описывается в точности системой уравнений (12)–(13) с  $v = 0$ . Решения, полученные в предыдущем параграфе, позволяют строить точные решения этой задачи при заданных начальных условиях распределения плотности и скорости потока. Начальные условия при  $v = 0$  задаются соотношениями

$$\rho(x, 0) = \frac{\partial \theta_0(x)}{\partial x}, \quad u(x, 0) = F(\theta_0(x)) - c(0), \quad (34)$$

где

$$\theta_0(x) = \theta(x, 0).$$

Для получения физически понятных решений необходимо предварительно выяснить то, какие распределения плотности, скорости и гравитационного потенциала допустимы с физической точки зрения. Основным требованием, ограничивающим выбор функции  $\theta_0(x)$ , является неотрицательность плотности жидкости во всех точках пространства:  $\rho \geq 0$ . В этом случае имеем

$$\theta(x, t) = \Theta_0(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) dx \geq 0.$$

Из уравнения Пуассона следует соотношение (14), которое связывает функцию  $\theta$  с ускорением свободного падения в точке с координатой  $x$ . Отсюда следует

$$\varphi_x \geq g_0(t). \quad (35)$$

По своему смыслу  $-\varphi_x$  является ускорением свободного падения в точке пространства с координатой  $x$ . Из физических соображений естественным выбором постоянной  $g_0(t)$  является такой, при котором ускорение свободного падения было бы равно нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Физически это связано с требованием  $\rho \rightarrow 0$  в этих же пределах. Однако, если полагать

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_x = 0, \quad (36)$$

то из соотношения (35) следует, что при  $x \rightarrow +\infty$  ускорение свободного падения стремится к некоторой отрицательной постоянной, равной

$$g_\infty = -4\pi GM,$$

где

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,t) dx \geq 0$$

есть полная масса материи в пространстве.

Поскольку  $\rho \geq 0$ , то отсюда следует, что в одномерном случае локализованное возмущение плотности создает на бесконечности постоянное поле тяготения. Выбор граничных значений напряженности гравитационного поля на бесконечности определяет в реальности значение скорости, которую приобретает сформировавшаяся структура при  $t \rightarrow \infty$ . Если  $g_{\infty} \neq g_{-\infty}$ , то центр масс всей системы приобретает некоторое ускорение. Это ускорение такое, что в системе, движущейся вместе с центром масс,  $g'_{\infty} = g'_{-\infty}$ . Здесь  $g'_{\infty}, g'_{-\infty}$  – величины ускорения на бесконечности в системе центра масс.

В качестве примера демонстрации некоторых важных эффектов в одномерном случае рассмотрим начальное распределение плотности, которое задается простой функцией  $\theta_0(x)$  следующего вида:

$$\theta_0(x) = \frac{M}{2} (\text{th}(kx) + 1),$$

где  $k > 0$  – произвольное положительное вещественное число, величина которого обратно пропорциональна характерному пространственному размеру  $L$  области, занятой материей:  $L = k^{-1}$ . Рассмотрим в качестве начального распределения скорости среды функцию  $u(x,0) = 0$ . При таком выборе  $g_{-\infty} = 0$ ,  $g_{\infty} = -4\pi GM$ . При этом начальное распределение плотности и скорости будет иметь следующий вид:

$$\rho(x,0) = \frac{Mk}{2 \text{ch}^2(kx)} > 0, \quad u(x,0) = 0. \quad (37)$$

В этом случае решение задачи о динамике такого возмущения дается в неявном виде как решение алгебраического трансцендентного уравнения:

$$\theta = \frac{M}{2} \left[ \text{th} \left( k(x + \mu_0 \theta t^2) \right) + 1 \right]. \quad (38)$$

Здесь  $\mu_0 = 2\pi G$ . Решения для плотности и скорости потока можно получить из интеграла движения. Дифференцируя (38) по  $x$  и  $t$ , находим:

$$\rho = \theta_x = \frac{Mk}{2 \text{ch} \left( k(x + \mu_0 \theta t^2) \right) - 2Mkt^2 \mu_0}, \quad u = -2\mu_0 t \theta. \quad (39)$$

На рис. 1 представлены распределения плотности в последовательные моменты времени  $t = 0; 2; 4; 6; 8; 0,95$ .

Видно, что центр масс системы ускоряется в направлении, обратном оси  $x$ . Аналогичные решения для начальных условий

$$\rho(x,0) = \frac{M}{\pi(1+k^2 x^2)} > 0, \quad u(x,0) = 0 \quad (40)$$

представлены на рис. 2. Для этого случая имеем:

$$\theta = \frac{M}{\pi}(k(x + \mu_0\theta t^2)), \quad \rho = \theta_x = \frac{Mk}{\pi + \pi k^2(x + \mu_0\theta t^2)^2 - Mkt^2\mu_0}, \quad u = -2\mu_0t\theta.$$

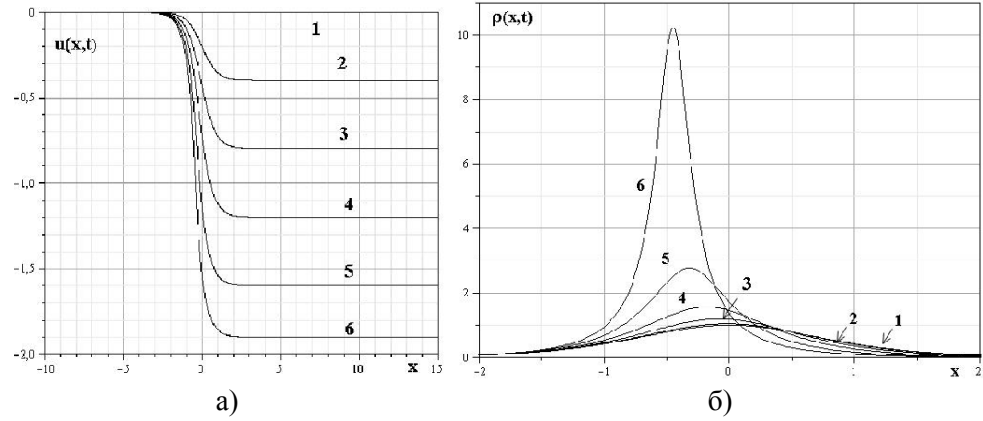


Рис. 1. Эволюция распределения скорости (а) и плотности (б) для начальных распределений (37)

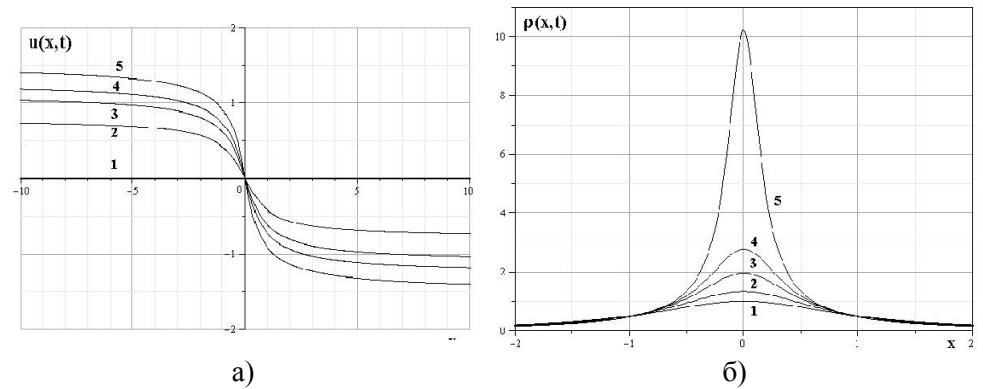


Рис. 2. Эволюция распределения скорости (а) и плотности (б) для начальных распределений (40)

Анализ построенных решений показывает, что за конечное время в распределении плотности возникает сингулярность. Момент возникновения сингулярности определяется условием, согласно которому знаменатель выражения для плотности обращается в ноль в какой-либо точке пространства. Для начального распределения (37) этот момент определяется условием

$$t_* = \sqrt{\frac{2}{kM\mu_0}} = \sqrt{\frac{L}{\pi GM}},$$

а для (40):

$$t_* = \sqrt{\frac{\pi}{kM\mu_0}} = \sqrt{\frac{L}{GM}}.$$

### 6. Джинсовская неустойчивость для распределений со сферической симметрией

При анализе модели эволюции сферически симметричного начального распределения плотности необходимо определить подходящую форму интеграла движения. Исходя из необходимости задавать начальное распределение плотности, общую форму интеграла движения полезно задавать в следующем виде:

$$\theta = \frac{M}{4\pi Q_0} Q(\chi(r, t)), \quad (41)$$

где  $M$  – полная масса вещества во всем пространстве,

$$Q_0 = \int_0^{\infty} Q'(r) dr = Q(\infty) - Q(0)$$

и

$$\chi(r, t) = r^{3/2} \pm \sqrt{8\pi G t} \sqrt{\theta}.$$

В этом случае функция  $Q(\chi)$  задает форму начального распределения функции  $\theta$  и в конечном итоге плотности, которая вычисляется в этом случае так:

$$\rho(r, t) = \frac{3M}{4\pi Q_0 r^{3/2}} \frac{\sqrt{\theta} Q'(\chi(r, t))}{8\pi G \sqrt{\theta} \mp M \sqrt{4\pi G} Q'(\chi(r, t)) t}.$$

Множитель  $M / (4\pi Q_0)$  в (41) выбирался из условия

$$M = 4\pi \int_0^{\infty} \rho r^2 dr.$$

Выбор самой функции  $Q(\chi)$  должен определяться требованиями  $0 < Q_0 < \infty$  и условием монотонного неубывания этой функции с ростом  $r$ . Кроме этого, исходя из того, что по крайней мере в начальный момент времени в начале координат отсутствует сингулярность в распределении плотности вещества ( $\rho = \theta_r / r^2$ ), зависимость  $Q(\chi)$  должна быть такой, что:

$$Q(\chi(r, 0)) = K(r^3),$$

где  $K(\xi)$  – всюду непрерывная монотонно неубывающая функция, равная 0 при  $\xi = 0$ :

$$K(0) = 0.$$

Это обеспечивает в нуле конечное значение плотности.

Исходя из общих условий выбора представления (41) и по аналогии с одномерным случаем рассмотрим интегралы движения двух типов. Первый интеграл

$$\theta(r, t) = \frac{M}{4\pi} \left( k(r^{3/2} + \sqrt{8\pi G t} \sqrt{\theta})^2 \right) \quad (42)$$

соответствует следующим начальным условиям для  $\rho = \theta r^{-2}$  и  $u$  при  $t = 0$ :

$$\theta_0(r, 0) = \frac{M}{4\pi} (kr^3); \quad (43)$$

$$\rho(r, 0) = \frac{3Mk}{4\pi^2 (kr^3)} > 0, \quad u(r, 0) = -\sqrt{8\pi G} r^{-1/2} \theta_0(r). \quad (44)$$

Здесь  $k > 0$  – как и раньше, произвольное положительное вещественное число, величина которого обратно пропорциональна характерному пространственному размеру  $L$  области, занятой материей:  $L = k^{-1}$ , а  $M$  – полная масса системы,  $Q_0 = 1$ .

Плотность и скорость потока (рис. 3, 4) могут быть вычислены через значения функции  $\theta(r, t)$  по формулам

$$\rho(r, t) = \frac{3Mk\sqrt{\theta}(1 + \mu_0 t \sqrt{\theta} r^{-3/2})}{4\pi\sqrt{\theta}^2 (k\chi^2(r, t)) - Mk\mu_0 t \chi(r, t)}, \quad u(r, t) = -\mu_0 \sqrt{\theta},$$

где  $\chi(r, t) = r^{3/2} + \mu_0 t \sqrt{\theta}$ ,  $\mu_0 = \sqrt{8\pi G}$ .

Второй интеграл

$$\theta(r, t) = \frac{M}{2\pi^2} \left( k(r^{3/2} + \sqrt{8\pi G} t \sqrt{\theta})^2 \right) \quad (45)$$

соответствует начальным условиям:

$$\theta_0(r, 0) = \frac{M}{2\pi^2} (kr^3); \quad (46)$$

$$\rho(r, 0) = \frac{3Mk}{4\pi} \frac{1}{1 + k^2 r^6} > 0, \quad u(r, 0) = 0. \quad (47)$$

Для этого случая  $Q_0 = \pi/2$ .

Анализ асимптотического поведения функций  $\theta$  и  $\rho$  вблизи нуля дает следующие соотношения:

$$\theta = r^3(\theta_0(t) + \theta_4(t)r^6 + O(r^{12})), \quad \rho = 3\theta_0(t) + 9\theta_4(t)r^6 + O(r^{12}).$$

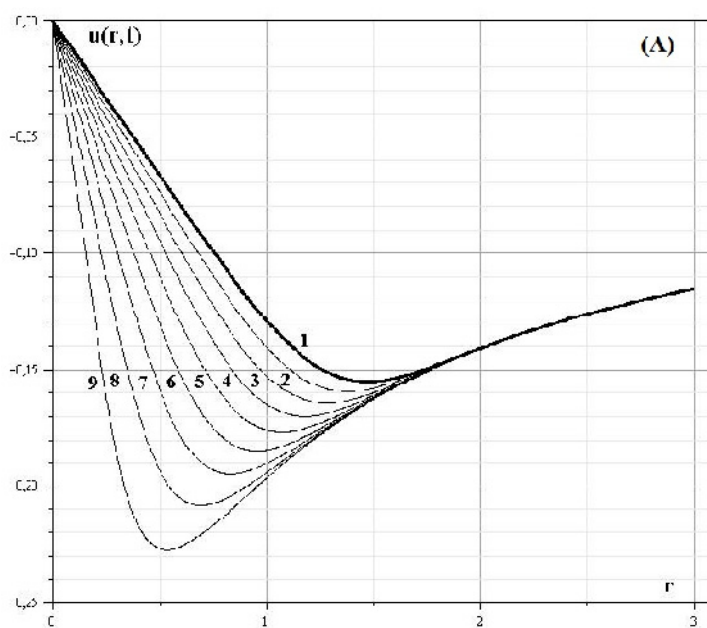
Уравнение для  $\theta_0(t)$ , следующее из (42), имеет вид

$$\theta_0 = \frac{Mk}{4\pi} (1 + \sqrt{\theta_0} t \mu_0)^2,$$

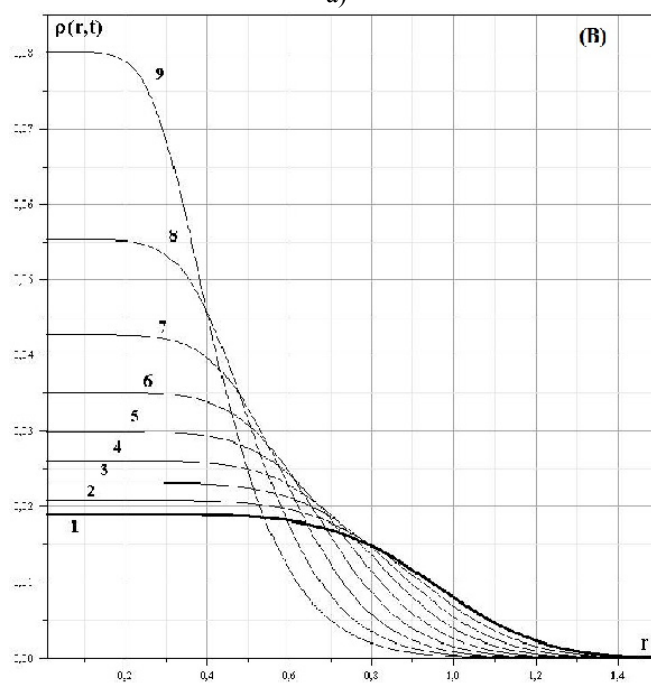
где  $\mu_0 = 4\pi G$ . Остальные коэффициенты разложения определяются  $\theta_0(t)$ .

Имеются два решения относительно  $\theta_0^\pm$ , соответствующие двум общим решениям уравнения (42) для функции  $\theta(r, t)$ :

$$\theta_0^\pm(t) = \frac{Mk}{4\pi(1 \pm \mu_0 t \sqrt{Mk/4\pi})}.$$



а)



б)

Рис. 3. Эволюция распределения скорости (а) и плотности (б) для начальных распределений (40) до образования сингулярности: 1 –  $t = 0$ ; 2 –  $t = 0,5$ ; 3 –  $t = 1,0$ ; 4 –  $t = 1,5$ ; 5 –  $t = 2,0$ ; 6 –  $t = 2,5$ ; 7 –  $t = 3,0$ ; 8 –  $t = 3,5$ ; 9 –  $t = 4,0$

Одно из этих решений при  $t > 0$  за конечное время

$$t_* = \sqrt{\frac{4\pi}{Mk}} \frac{1}{\mu_0}$$

обращается в бесконечность, что соответствует возникновению в начале координат сингулярности в распределении массы. Второе решение не имеет физического смысла.

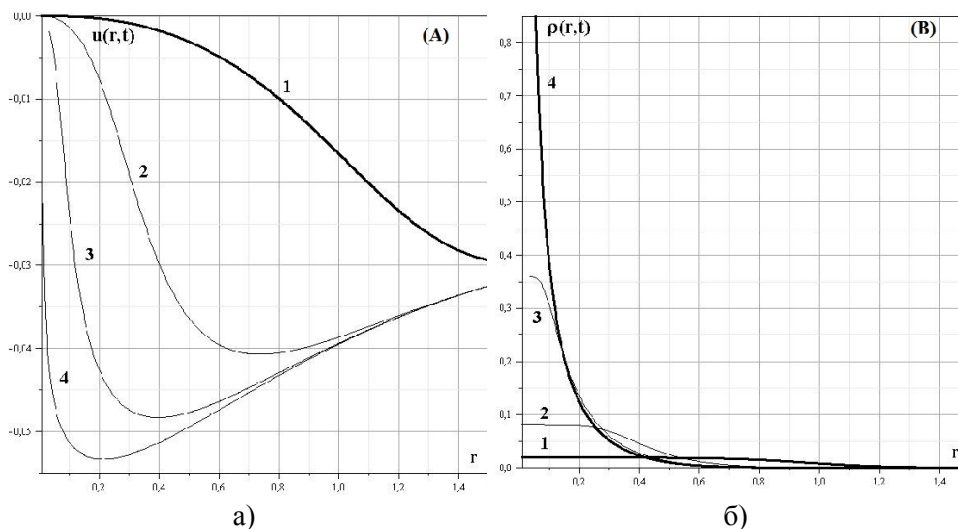


Рис. 4. Распределения скорости (а) и плотности (б) для начальных распределений (40) до и после образования сингулярности: 1 –  $t = 0$  ; 2 –  $t = 4,0$  ; 3 –  $t = 4,8$  ; 4 –  $t = 5,0$

### Заключение

Как продемонстрировано в данной работе, развитый метод построения моделей динамики сжимаемой жидкости, допускающих преобразование к интегрируемым уравнениям с помощью обобщенных подстановок Коула – Хопфа, оказывается эффективным при решении ряда задач динамики самогравитирующей среды. В рамках этого подхода можно на основе аналитических решений рассмотреть ряд важных вопросов формирования структур в пылевых облаках, что важно для целого ряда задач астрофизики [19]. В данной работе не проводилось сравнение между формой решений, которые можно получить с помощью метода годографа [12, 19] и данным методом. Однако, как показывают результаты работы [19], с помощью метода годографа можно эффективно исследовать асимптотическое поведение решений. Данный же метод позволяет получать более тонкую информацию о точном решении для разнообразных начальных условий. Следует также отметить, что данный метод достаточно эффективно работает как в случае идеальной жидкости, так и в случае вязкой среды. Решения для вязкой среды в рамках метода годографа получить не удастся. Поэтому данный метод имеет гораздо более широкую область применения.

### Список литературы

1. **Burgers, J. M.** The nonlinear diffusion equation / J. M. Burgers. – Dordrecht, Holland: D. Reidel Publisher Company, 1974. – P. 185.
2. **Hopf, E.** The partial differential equation  $ut + uux = muxx$  / E. Hopf // Comm. Pure and Appl. Math. – 1950. – V. 3. – P. 201–230.
3. **Cole, J. D.** On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics / J. D. Cole // Quart. Appl. Math. – 1951. – V. 9. – № 3. – P. 225–236.

4. **Уизем, Дж.** Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М. : Мир, 1978. – 622 с.
5. Солитоны / под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. – М. : Мир, 1983. – 408 с.
6. **Захаров, В. Е.** Теория солитонов: метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. – М. : Наука, 1980. – 320 с.
7. **Додд, Р.** Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррио. – М. : Мир, 1988. – 694 с.
8. **Ландау, Л. Д.** Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 2003. – 732 с.
9. **Кочин, Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – М. : Наука, 1963. – 584 с.
10. **Полянин, А. Д.** Системы уравнений гидродинамического типа: точные решения, преобразования, нелинейная устойчивость / А. Д. Полянин, С. Н. Аристов // Доклады академии наук. – 2009. – Т. 428, № 2. – С. 180–185.
11. **Броман, Г. И.** Затопленная струя Ландау: точные решения, их смысл и приложения / Г. И. Броман, О. В. Руденко // Успехи физических наук. – 2010. – Т. 180, № 1. – С. 97–104.
12. **Полянин, А. Д.** Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. – М. : Физматлит, 2005. – 256 с.
13. **Журавлев, В. М.** О нелинейных уравнениях, связанных с уравнениями теплопроводности и Д'Аламбера с помощью подстановок типа Коула – Хопфа / В. М. Журавлев, А. В. Никитин // Нелинейный мир. – 2007. – Т. 5, № 9. – С. 603–611.
14. **Журавлев, В. М.** Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула – Хопфа, и точно интегрируемые модели одномерных течений сжимаемой жидкости / В. М. Журавлев, Д. А. Зиновьев // Письма в ЖЭТФ. – 2008. – Т. 87, № 5. – С. 314–318.
15. **Журавлев, В. М.** Метод обобщенных подстановок Коула – Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений / В. М. Журавлев // Теоретическая и математическая физика. – 2009. – Т. 158, № 1. – С. 58–71.
16. **Журавлев, В. М.** Метод обобщенных подстановок Коула – Хопфа в размерности 1+2 и интегрируемые модели двумерных течений сжимаемой жидкости / В. М. Журавлев, Д. А. Зиновьев // Письма в ЖЭТФ. – 2008. – Т. 88, № 3. – С. 194–197.
17. **Журавлев, В. М.** Инновационные технологии / В. М. Журавлев ; под ред. проф. С. В. Булярского. – Ульяновск : Изд-во УлГУ, 2010. – С. 77–93.
18. **Zhuravlev, V. M.** Nonlinear Waves in Self-Gravitating Compressible Fluid and Generalized Cole–Hopf Substitutions / V. M. Zhuravlev, D. A. Zinov'ev // Physics of Wave Phenomena. – 2011. – V. 19, № 4. – P. 313–317.
19. **Гуревич, А. В.** Крупномасштабная структура Вселенной. Аналитическая теория / А. В. Гуревич, К. П. Зыбин // Успехи физических наук. – 1995. – Т. 165, № 7. – С. 723–758.
20. **Рождественский, Б. Л.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М. : Наука, 1978. – 689 с.
21. **Куликовский, А. Г.** Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, А. П. Чугайнова. – М. : МИАН, 2011. – 120 с.



***Журавлев Виктор Михайлович***

доктор физико-математических наук,  
профессор, кафедра теоретической  
физики, Ульяновский государственный  
университет

E-mail: zhvictorm@mail.ru

***Zhuravlyov Viktor Mikhailovich***

Doctor of physical and mathematical  
sciences, professor, sub-department  
of theoretical physics, Ulyanovsk  
State University

***Зиновьев Дмитрий Александрович***

ассистент, кафедра теоретической  
физики, Ульяновский государственный  
университет

E-mail: zinovjev\_d@mail.ru

***Zinovyev Dmitry Alexandrovich***

Assistant, sub-department of theoretical  
physics, Ulyanovsk State University

---

УДК 532.5, 52-43, 514.86

**Журавлев, В. М.**

**Интегрируемые модели динамики сжимаемой среды в собственном поле тяготения. Метод подстановок Коула – Хопфа / В. М. Журавлев, Д. А. Зиновьев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 4 (24). – С. 174–190.**