Многомерные нелинейные волновые уравнения с многозначными решениями

Журавлев В.М.

Ульяновский государственный университет,
Кафедра теоретической физики,
Russia, Ulyanovsk, L.Tolstoy str., 42
zhvictorm@gmail.com

В работе излагается теория опрокидывающихся волн в нелинейных системах, описание динамики и пространственной структуры которых строится на базе многомерных нелинейных гиперболических волновых уравнений. Находится общая связь систем квазилинейных уравнений первого порядка с нелинейными гиперболическими уравнениями более высокого порядка, которые описывают, в частности, электромагнитные волны в среде с нелинейной поляризацией произвольного вида. В рамках этого подхода строятся точные многозначные решения уравнений этого типа. Исследуется пространственная структура этих решений и их динамика. Результаты переносятся на широкий класс многомерных уравнений таких как уравнения Д'Аламбера, нелинейные уравнения Клейна-Гордона и нелинейные телеграфные уравнения.

Ключевые слова: Точные решения многомерных гиперболических уравнений, опрокидывающиеся волны, многозначные решения, электромагнитные волны в среде с нелинейной поляризацией

1 Введение

Многозначные функции являются одним из основных атрибутов теории квазилинейных уравнений первого порядка, которые возникают в различных прикладных задачах гидродинамического типа [1, 2, 3]. В задачах такого типа многозначные решения заменяются на однозначные разрывные решения - ударные или опрокидывающиеся волны. Однако известно сравнительно небольшое число многомерных уравнений порядка выше первого, для которых многозначные решения построены в явном виде. К уравнениям такого типа относятся, например, некоторые уравнения теории солитонов, описанные в [4]. Интересный, но, по всей видимости, достаточно забытый результат содержится в [5], где описаны многозначные решения и ударные волны уравнений Максвелла для определенных типов нелинейных сред и систем. В нелинейной оптике такие решения найдены в [6]. Важным и уже классическим результатом является наличие многозначных решений уравнения Д'Аламбера в размерности 3+1, который был использован в теории твисторов и точных решений в теории гравитации Общей теории относительности [7, 8]. В работе [9] был найден класс многозначных решений уравнения Лиувилля в размерности $1+3$, который там же распространен на нелинейное уравнение теплопроводности в размерности $1+4$. В работе [10] было показано, что для гиперболического уравнения второго порядка, описывающего распространение электромагнитных волн в диэлектриках с произвольного вида поляризуемостью среды в случае отсутствия дисперсии существует класс точные решений, который представляет собой решения квазилинейного уравнения первого порядка с подходящего вида локальной фазовой скоростью, зависящей от напряженности волны. Этот же результат переносится на уравнения для нелинейных акустических волн. Из этих примеров видно, что уравнения с многозначными решениями встречаются в различных разделах физики и играют в них часто очень важную роль. Поэтому отыскание общих классов решений уравнений, которые содержат многозначные решения, может оказаться важным фактором в понимании общего устройства множества решений нелинейных гиперболических уравнений, широко используемых в практических задачах.

В настоящей работе, основываясь на результате работы [10], строится новый класс точных многозначных вещественных решений целого ряда многомерных (размерность $n+1$) нелинейных уравнений второго порядка, в том числе, уравнения распространения электромагнитных волн в диэлектриках с произвольной поляризуемостью и акустических волн в газах. Источником новых решений являются многомерные квазилинейные уравнения первого порядка. Отметим, что векторные уравнения такого типа для размерности координатного пространства $n=1$ (1+1) рассматривались в рамках обобщенного метода годографа [11] и размерности $n=2$ (1+2) гидродинамических редукций [13, 12]. В этих работах исследовались условия интегрируемости таких систем и анализировались их общие свойства. В настоящей работе в качестве источника решений рассматриваются квазилинейные уравнения относительно одной скалярной неизвестной функции, но в размерности координатного пространства n (n+1). Интегрируемость таких систем устанавливается явным указанием общего интеграла движения. Результаты построения решений для уравнений второго порядка специального вида распространяются в данной работе на уравнения типа Клейна-Гордона в произвольной конечной размерности координатного пространства, а так же на нелинейные уравнения телеграфного типа той же размерности $n+1$. В данной работе рассматриваются уравнения с вещественными коэффициентами и их вещественные решения.

2 Системы квазилинейных уравнений и многомерные нелинейные гиперболические уравнения

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial E}{\partial x_\alpha} = A_\alpha(E)E_t, \quad \alpha = 1,\ldots,n, \tag{1}$$

где $A(E) = (A_1(E),\ldots,A_n(E))$ - вектор-функция, зависящая от неизвестной функции $E = E(x,t)$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$ и t. .

Решением этой системы является функция $E = E(x,t)$, удовлетворяющая алгебраическому уравнению:

$$H(E, t + A_1(E)x_1 + \cdots + A_n(E)x_n) = 0, \tag{2}$$

где $H(\xi,\eta)$ - произвольная дифференцируемая функция двух аргументов $\xi = E$ и $\eta = t + (A,x)$, где $(A(E),x) = A_1(E)x_1 + \cdots + A_n(E)x_n$. Это устанавливается последовательным дифференцированием (2) по переменным $x_1,\ldots,x_n,t$:

$$\begin{aligned} &E_{,\alpha}H_\xi + (A_\alpha + (A'(E),x)E_\alpha)H_\eta = 0, \quad \alpha = 1,\ldots,n; \\ &E_{,t}H_\xi + (1 + (A'(E),x)E_t)H_\eta = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Исключая из этой системы уравнений производные функции $H(\xi,\eta)$, получаем систему уравнений (1) .

Из системы уравнений (1) в результате дифференцирования и повторного использования ее самой находим важное следствие:

$$\Delta E = \frac{\partial}{\partial t}\left(|A|^2 E_t\right), \tag{4}$$

где

$$|A(E)|^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha^2(E).$$

Введем обозначение:

$$\lozenge_{|A|} = \Delta - \frac{\partial}{\partial t}\left(| A(E) |^2 \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

так что уравнение (4) можно записать в следующем виде:

$$\lozenge_{|A|} E = 0.$$

Важным свойством уравнения (4) , вне зависимости от его интерпретации и типа нелинейности, является инвариантность его формы относительно преобразований вращений вектор-функции $A(E)$ в координатном пространстве R^n . Все такие преобразования оставляют инвариантной длину вектора $A(E)$ в R^n . Введем обозначение: $R(E) = | A(E) | = \sqrt{A_1^2(E) + \cdots + A_n^2(E)}$. Тогда вектор-функцию $A(E)$ можно представить в следующем общем виде:

$$A = R(E) n(E),$$

где $n(E)$ - произвольный единичный вектор в R^n, зависящий от значения функции E . Следовательно, компоненты вектора $n(E)$ содержат $n-1$ произвольных функций, представляющих собой угловые координаты на единичной сфере S^{n-1}б зависящие от E .

Инвариантность формы уравнения (4) относительно выбора функциональной зависимости единичного вектора $n(E)$ от E означает, что решение (2) при любом допустимом выборе $H(\xi, \eta)$ и $n(E)$ является решением уравнения (4) . При этом следует отметить, что произвольный выбор функции $H(\xi, \eta)$ в силу (2) допускает в решениях системы (1) произвол, ограниченный функцией лишь одного аргумента.

Утверждение 1. Каждое решение системы квазилинейных уравнений (1) для заданной функции $R(E) = | A(E) |$ и произвольной вектор функции $n(E) : | n |^2 = 1$ является решением уравнения (4) . Обратное утверждение неверно.

Утверждение 2. Каждое решение системы квазилинейных уравнений (1) для заданной функции $R(E) = | A(E) |$ и произвольной вектор-функции $n(E) : | n |^2 = 1$ является решением уравнения эйконала:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (E_{,\alpha})^2 = | A(E) |^2 (E_t)^2. \qquad (5)$$

Это утверждение является прямым следствием системы (1) .

Еще одно следствие можно получить из (1) с помощью дифференцирования его по t и комбинирования с самой этой системой уравнений. Оно имеет вид уравнения Эйлера.

Утверждение 3. Вектор-функция $U = \{U^1, \ldots, U^n\}$ с компонентами:

$$U^\alpha = -\frac{1}{| A |^2} A^\alpha(E), \ \alpha = 1, \ldots, n,$$

и функция $\rho = | A |^2 E_t$ удовлетворяют системе однородных уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial U^\alpha}{\partial t} + U^\beta \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, n; \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\rho U^\alpha) = 0$$

для потока идеальной жидкости со скоростью U и плотностью ρ .

Справедливость первого уравнения устанавливается прямым дифференцированием вектор-функции U и последующим использованием исходной системы уравнений (1) .

Второе уравнение эквивалентно уравнению (4) при использовании определения для функции ρ и U.

3 Физическая интерпретация уравнений

Уравнение (4) преобразуется к уравнению плоскополяризованных электромагнитных волн в среде с нелинейной поляризацией $P(E)$, связанной с вектор-функцией $A(E)$ соотношением:

$$P'(E) = \frac{c^2}{4\pi}|A(E)|^2 - 1.$$

В этом случае уравнение (4) имеет точный вид уравнения Максвелла для электромагнитных волн в среде с нелинейной поляризацией $P(E)$:

$$c^2 \Delta E - E_{tt} = 4\pi \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(E). \tag{7}$$

Это уравнение соответствует отсутствию дисперсии в среде. Это определяет специфически условия его применения в электродинамике. В частности такие условия описаны в [5].

Другая физическая интерпретация уравнения соответствует звуковым волнам в идеальном газе. Уравнения акустических волн в такой среде имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u^\alpha + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\rho u^\alpha u^\beta = -\frac{\partial P}{\partial x^\alpha},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\rho u^\beta = 0.$$

Первое векторное уравнение этой системы - уравнения Эйлера для скорости потока u^α, а последнее - уравнение неразрывности. Для адиабатических звуковых волн в газе давление P является заданной функцией плотности газа ρ. Вычисляя дивергенцию от первого векторного уравнения этой системы, приходим к уравнению для ρ:

$$\rho_{tt} = \Delta P(\rho) + \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\alpha}(\rho u^\alpha u^\beta).$$

Пренебрегая последним слагаемым в правой части (инерционной нелинейностью), получаем уравнение для давления в среде в форме:

$$\Delta P = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho(P). \tag{8}$$

В этом случае:

$$\rho'(P) = |A(P)|^2.$$

4 Общие свойства решений системы квазилинейных уравнений

Решения уравнения (4), совпадающие с решениями системы квазилинейных уравнений (1), обладают особыми свойствами, которые выделяют их из всех других типов возможных решений этого уравнения. Поскольку векторное поле $A = A(E(x,t))$ в заданный момент времени t зависит только от значения функции E, то оно постоянно на изоповерхностях функции E: $A|_{E=const} = const$. Однако согласно самим уравнениям (1) поле A коллинеарно в каждой точке пространства полю ∇E, которое всюду ортогонально гиперповерхности $E = E_0(t)$. Отсюда следует, что изоповерхностями функции E являются гиперплоскости, поскольку в любой точке этой гиперповерхности нормаль к ней имеет одно и тоже направление, зависящее только от E. Поскольку, как уже отмечалось выше, форма уравнения (4) не зависит от направления поля A в каждой точке, то каждое решение (1), совпадающее с одним из решений (4) при заданной функции $R(E) = |A|$, будет определяться вектор-функцией $n(E)$. Точнее это можно выразить в форме следующего утверждения:

<u>Утверждение 4</u>. Решение системы (1) $E(x,t)$ при заданной функции $R(E) = |A(E)|$ определяется однозначно парой функциональных параметров $\{C_n, E(s,t)\}$, в которой C_n является независящей от времени однопараметрической кривой, называемой далее базовой:

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = n^\alpha(s), \quad A^\alpha(E(s)) = R(s)n^\alpha(s), \tag{9}$$

в координатном пространстве R^n, и функцией $E(s,t) = E(x(s),t)$ - являющейся решением уравнения Хопфа:

$$\frac{\partial E}{\partial s} = R(E)\frac{\partial E}{\partial t}. \tag{10}$$

<u>Доказательство</u>. Поскольку выше было доказано, что изоповерхностями функции $E(x,t)$ являются гиперплоскости, к которым ортогональны поля $A = Rn$ и n, то первую часть утверждения можно считать доказанной. Пусть C_n - кривая, заданная уравнением (9). Тогда, используя систему уравнений (1), имеем:

$$\frac{\partial E}{\partial s} = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial E}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial s} = \sum_{\alpha=1}^{n}R(E)E_t n^\alpha(E(s,t))n^\alpha(E(s,t)) = R(E)E_t. \tag{11}$$

Последнее равенство следует из условия $|n|^2 = \sum_{\alpha=1}^{n}n^\alpha n^\alpha = 1$. Отсюда сразу следует (10). Заметим, что решение $E(s,t)$ уравнения Хопфа находится как решение уравнения:

$$H(E, t + R(E)s) = 0, \tag{12}$$

где $H(\xi,\eta)$ та же функция, что и в решении (2), что соответствует выбору параметра s по формуле:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}n^\alpha(E(s,t))x^\alpha(s) = s.$$

В результате решение (2) переходит в решение (12).

Такие решения в дальнейшем будем называть **ривертонами** (``river'' - река). Как следует из приведённого утверждения, ривертоны представляют собой бегущие плоские волны, направление распространения которых в каждой точке пространства не меняется со временем и определяется касательной к кривой C_n. Значение же функции E на каждой гиперплоскости меняется со временем и представляет волну с опрокидывающимся фронтом. Кривая C_n фактически представляет собой проекцию характеристики ривертона на вещественное координатное пространство R^n. Сама же характеристика является траекторией фронта волны в пространстве-времени $R^n \times T$, где T - ось времени.

Заметим, что для $n = 1$ кривая C_n совпадает с одномерной осью x^1, а уравнение (1) переходит в уравнение Хопфа (10) .

В случае, если кривая C_n не является прямой, то гиперплоскости, ортогональные кривой C_n, будут пересекаться по некоторым гиперплоскостям. Совокупность всех точек пересечения гиперплоскостей, ортогональных C_n, заполняет в общем случае некоторую область $V^n \subset R^n$, которая целиком определяется геометрией кривой C_n. В общем случае в области V^n лежат точки, на которых пересекаются гиперплоскости $s = \text{c}onst$ бесконечное число раз. На границе этой области число пересечений конечно. Поэтому в V^n непрерывные решения отсутствуют. В некотором смысле границы областей V^n подобны каустикам в оптике, но определяются с геометрической точки зрения иначе.

Отметим так же то обстоятельство, что ривертоны по сути являются решениями задачи Коши для уравнений (1) и (4) . Этот момент важен, поскольку в Утверждении 4 кривая C_n задается в начальный момент времени вместе с начальным распределением функции $E_0 = E(s, \text{Å}_0)$ вдоль этой кривой. Это означает, что вместе с геометрическими характеристиками кривой C_n задаются пространственные свойства ривертона, которые определяются геометрией областей однозначности функции $E(x,t)$.

5 Общая геометрическая структура ривертонов

Пусть задана некоторая базовая кривая C_n ривертона в форме системы уравнений (9) . Интегрируя эту систему приходим к параметрическому заданию данной кривой в форме уравнений:

$$x^\alpha = X^\alpha(s) = \int n^\alpha(s)ds + x_0^\alpha.$$

Постоянные x_0^α указывают положение кривой относительно начала координат. В этом случае гиперплоскости уровня $E = \text{c}onst$ в R^n, соответствующие заданному значению параметра s, можно записать в виде уравнения:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x^\alpha n^\alpha(s) = \sum_{\alpha=1}^{n} X^\alpha(s) n^\alpha(s) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\sum_{\alpha=1}^{n}[X^\alpha(s)]^2.$$

Две гиперплоскости, отвечающие двум значениям s_1 и s_2 параметра s пересекаются в пространстве R^n по совокупности точек, являющихся решением двух таких уравнений:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x^\alpha n^\alpha(s_1) = F(s_1), \quad \sum_{\alpha=1}^{n} x^\alpha n^\alpha(s_2) = F(s_2), \tag{13}$$

где

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\sum_{\alpha=1}^{n}[X^\alpha(s)]^2.$$

Эти совокупности точек образуют в R^n гиперплоскости размерности $n-2$. Огибающая множества всех таких гиперплоскостей будет образовывать границу областей однозначности и многозначности ривертона.

Огибающую области многозначности без ограничения общности можно вычислить следующим образом. Огибающая состоит из точек пересечения всех бесконечно близких гиперплоскостей при $s_1 \to s_2$. Систему (13) можно разрешить относительно первых двух координат x_1 и x_2, в результате чего они становятся функциями s_1 и s_2, а так же остальных координат $x_3,\dots,x_n$:

$$x_1(s_1,s_2)=\frac{G(s_2,x)n^2(s_1)-G(s_1,x)n^2(s_2)}{n^2(s_1)n^1(s_2)-n^2(s_2)n^1(s_1)}, \tag{14}$$

$$x_2(s_1,s_2)=-\frac{G(s_2,x)n^1(s_1)-G(s_1,x)n^1(s_2)}{n^2(s_1)n^1(s_2)-n^2(s_2)n^1(s_1)}.$$

Здесь

$$G(s,x)=F(s)-\sum_{\alpha=3}^{n}x^{\alpha}n^{\alpha}(s).$$

В пределе $s_1\to s_2\to s$ мы получаем уравнение гиперплоскости $E^{n-2}(s_1,s_2)$ размерности $n-2$, являющейся пересечением двух бесконечно близких гиперплоскостей $E=E(s_1)$ и $E=E(s_2)$. В пределе $s_1\to s_2\to s_0$ получаем множество $\{E^{n-2}(s_0)\}$ гирперплоскостей, зависящих от параметра s_0, образующих гиперповерхность G^{n-1}, к которой касательны все гиперплоскости $E=E(s_0)$ для значений параметра s_0 в некотором интервале (s_1,s_2). Поскольку все гиперплоскости $E=E(s)$ из интервала $s\in(s_1,s_2)$ касательны к G^{n-1}, то они пересекаются друг с другом в области, лежащей в R^n с одной стороны по отношению к G^{n-1}. Следовательно, гиперповерхность G^{n-1} разделяет области многозначности и однозначности ривертона, по крайней мере, для интервала (s_1,s_2) параметра s.

Переходя к пределу $s_1\to s_2\to s$ в соотношениях (14), получаем уравнения параметрического задания гиперповерхностей G^{n-1}:

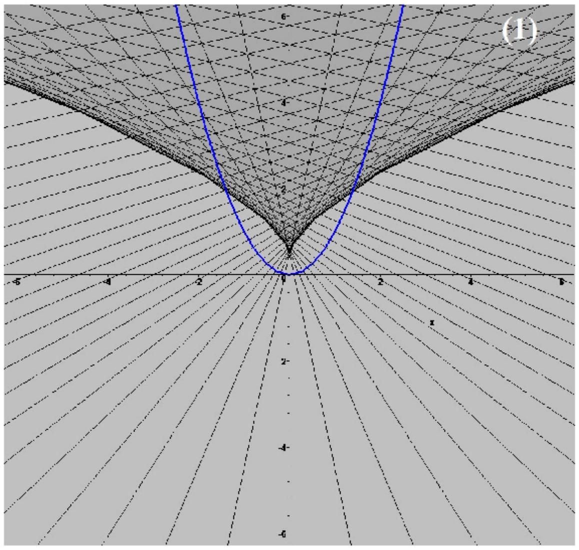
$$x_1(s)=\frac{G_1'(s,x)}{N_1'(s)},\ x_2(s)=\frac{G_2'(s,x)}{N_2'(s)}, \tag{15}$$

где

$$G_1'(s,x)=\frac{d}{ds}\left(\frac{G(s,x)}{n^1(s)}\right),\ G_2'(s,x)=\frac{d}{ds}\left(\frac{G(s,x)}{n^2(s)}\right),$$

$$N_1'(s)=\frac{d}{ds}\left(\frac{n^1(s)}{n^2(s)}\right),\ N_2'(s)=\frac{d}{ds}\left(\frac{n^2(s)}{n^1(s)}\right).$$

На рис. 1. и 2 приведены примеры вычисления областей однозначности ривертонов для размерности координатного пространства $n=2$ в случае кривых: $y=x^2$ (рис.1) и $y=\sin(x)$ (рис. 2). На рисунках сплошными прямыми обозначены линии уровня $E=const$.



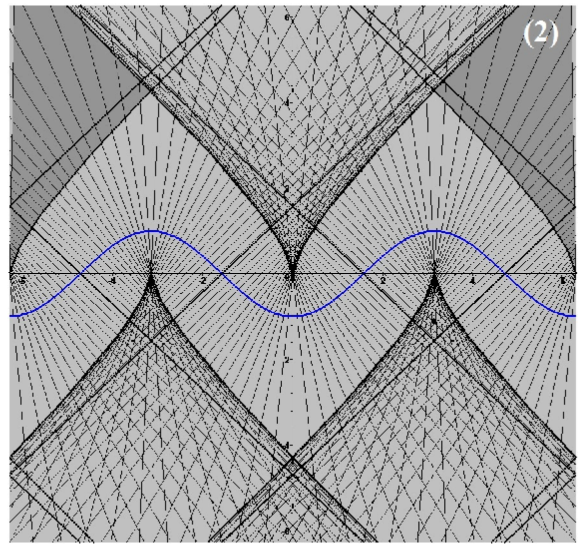


Figure 1: Области однозначности ривертонов (выделены светлым серым) для базовых кривых $y = x^2$ (1) и $y = -\cos(x)$ (2) (сплошная кривая)

Границы областей многозначности (на рисунках обозначены жирной кривой) и задаются параметрически следующими соотношениями:

$$(1): \; X(s) = -4s^3, \; Y(s) = (1+6s^3)/2;$$

$$(2): \; X(s) = s - 2(s) + \sin(2s)/2, \; Y(s) = (1-\cos(2s))/\cos(s).$$

Рассматривая общие свойства огибающих, которые задаются уравнениями (15), легко понять, что в случае замкнутых кривых или кривых с самопересечениями области однозначности решений в форме ривертона отсутствуют. Однако в этом случае, дополняя решением некоторыми условиями периодичности, можно, по крайней мере, для некоторых кривых, например, окружностей, построить однозначные решения. Мы не будем доказывать этот факт специально, поскольку для окружностей он практически очевиден, а для более общего случая требует более детального анализа, что выходит за рамки данной работы.

6 Опрокидывание фронта

Области неоднозначности V^n - не единственная особенность ривертонов. Некоторые изоповерхности функции $E(x,t)$ в R^n являются целиком поверхностями опрокидывания фронта волны в соответствии со свойствами уравнения Хопфа (10). Все точки пространства, в которых происходит ветвление решения или опрокидывание его фронта, определяются из условия обращения производных решения по координатам в бесконечность. По аналогии с этим мы можем найти значения параметра s, в которых происходит опрокидывание фронта ривертонов. Из (??) имеем:

$$E_{,\alpha} = -\frac{A_\alpha H_\eta}{H_\xi + (A', x) H_\eta}.$$

Отсюда находим общее уравнение для поверхности опрокидывания фронта:

$$H_\xi + (A', x) H_\eta = 0, \quad H(\xi, \eta) = 0. \qquad (16)$$

В области однозначности поверхность опрокидывания фронта представляет собой некоторую гиперплоскость $E = E(s_*)$ со значением параметра $s = s_*$, которое находится из аналогичного соотношения для уравнения Хопфа (10) :

$$s_* = -\frac{H_\xi}{R'(E(s_*, t_*))},$$

где $H(\xi,\eta)$ та же функция, что и в решении (2) .

Для полноты анализа укажем на следующее свойство ривертонов:

Утверждение 5. Пусть $E(x,t)$ - решение (1) в виде ривертона. Тогда любая функция $\widetilde{E}(x,t) = F(E(x,t))$, где $F(E)$ - произвольная дважды дифференцируемая функция одного аргумента E, так же является ривертоном.

Доказательство. Пусть $E(x,t)$ - ривертон, а $F(E)$ - произвольная дважды дифференцируемая функция. Тогда имеем следующие тождества:

$$\frac{\partial F(E)}{\partial x^\alpha} = F'(E)E_{,\alpha} = F'(E)A_\alpha E_t = A_\alpha \frac{\partial F(E)}{\partial t}.$$

Эти тождества соответствуют обращению в тождество уравнений (1) и, следовательно, (4) , при подстановке в них в качестве решения функции $\widetilde{E}(x,t) = F(E(x,t))$.

7 Многозначные решения уравнений Д'Аламбера

Среди уравнений (4) , решениями которых являются ривертоны, полезно выделить особый класс, соответствующий условию: $R(E) =| A(E) |= 1$. При выполнении такого условия уравнение (4) представляет собой уравнение Д'Аламбера в вещественным координатном пространстве R^n. В результате доказывается, что при любом $n > 1$ линейное уравнение Д'Аламбера имеет решения в виде ривертонов (2) :

$$H(E, t + \sum_{\alpha=1}^{n} n_\alpha(E)x^\alpha) = 0, \qquad (17)$$

т.е. многозначные решения. Для случая $n = 3$ подобный результат был использован в теории твисторов (см. например, [7, 8]), но для комплексных функций E. В данном же случае решения вещественные, если входящие в запись (17) произвольные функции - вещественные.

Таким образом, можно сформулировать следующее:

Утверждение 6. Для любого $n > 1$ уравнение Д'Аламбера:

$$\Delta E = E_{tt}, \quad (\Diamond_1 E = 0)$$

имеет решения $E(x,t)$ в виде ривертонов $\{C_n, E(s,t)\}$, структура которого определяется произвольной вектор-функцией $n(E): | n |^2 = 1$ и интегралом движения $H(\xi,\eta)$.

Поскольку уравнение Д'Аламбера линейное, то для него выполняется линейный принцип суперпозиции. Это означает, что любая линейная комбинация ривертонов является решением уравнения Д'Аламбера. Однако при этом следует иметь ввиду то, что каждый ривертон имеет свои области неоднозначности $V^n[C_n]$. В суперпозиционном решении область неоднозначности будет являться объединением областей неоднозначности отдельных ривертонов. Следует также отметить, что наличие поверхностей, на которых решение типа ривертона становится не однозначным, эквивалентно уравнению Д'Аламбера с сингулярным источником в правой части. Аналогичные конструкции рассматривались в [8]. Подобные построения, по всей видимости, имеют место и в случае нелинейных уравнений (4) общего вида, но требуют отдельного анализа.

8 Точные решения многомерных нелинейных телеграфных уравнений и Клейна-Гордона

Ривертоны позволяют строить точные решения других многомерных нелинейных уравнений. Доказательство такого общего утверждения строится на простом анализе суперпозиций ривертонов и некоторых элементарных функций.

Рассмотрим функции следующего вида:

$$\Phi(x,t) = G(E + L(k,\omega,x,t)),$$

где E - ривертон, $L(k,\omega,x,t) = (k,x) + \omega t$ - линейная функция координат и времени, $G(S)$ - дважды дифференцируемая функция одного аргумента $S(E,x,t) = (E + (k,x) + \omega t)$, $k = (k_1,\cdots,k_n)$ - постоянный вектор в R^n, ω - вещественное число. Имеем следующее общее тождество:

$$\Diamond_{|A|}\Phi = \Diamond_{|A|}G(S) = G'(S)\Diamond_{|A|}S + G''(S)[(\nabla S,\nabla S) - |A|^2 (S_t)^2].$$

Учитывая свойства ривертонов и линейность функции $L(k,\omega,x,t)$, имеем:

$$\Diamond_{|A|}S(E,x,t) = 0,\ L_{tt} = 0.$$

Кроме этого, находим:

$$(\nabla S,\nabla S) = 2(k,\nabla E) + |k|^2 - |A(E)|^2 (\omega^2 + 2\omega E_t) =$$
$$= 2[(k,A(E)) - \omega |A(E)|^2]E_t + |k|^2 - |A(E)|^2 \omega^2.$$

Отсюда вытекает:

<u>Утверждение 7</u>. Функция $G(S)$, где $S = E + L(k,\omega,x,t)$, E - ривертон, а $L(k,\omega,x,t) = (k,x) + \omega t$ - линейная функция координат и времени с произвольными вещественными коэффициентами k,ω при условиях:

$$|A|^2 = R_0^2 = const,\ (k,A(E)) - R_0^2\omega = \lambda = const, \tag{18}$$

является решением нелинейного телеграфного уравнения:

$$\Diamond_{R_0}G(S) = G''(S)(2\lambda S_t + \mu), \tag{19}$$

где постоянная μ имеет следующий вид:

$$\mu = |k|^2 - \omega^2 R_0^2 - 2\omega\lambda. \tag{20}$$

Решения этого типа будем называть аддитивно модифицированными ривертонами.

<u>Пример 1</u>. В случае $\lambda = 0$ уравнение (19) принимает вид нелинейного уравнения Клейна-Гордона:

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(S) = \mu G''(S).$$

В частном случае $G(S) = \ln S$ получаем уравнение Лиувилля:

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\ln S = -\frac{\mu}{S^2},$$

а в случае, если функция $G(S)$ удовлетворяет уравнению $G'' = \nu^2 G$, приходим к линейному уравнению Клейна-Гордона:

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(S) = \mu v^2 G(S).$$

Это указывает на существование решений в форме аддитивно модифицированного ривертона для этого типа уравнений.

Пример 2. В случае $\mu = 0$ уравнение (19) принимает вид нелинейного телеграфного уравнения:

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(S) = \lambda G''(S) S_t.$$

В случае $n = 2{,}3$ эти уравнения имеют отношение к распространению нелинейных электромагнитных волн в среде с нелинейной проводимостью, например, в газах.

Прямым следствием утверждений 5 и 7 является следующее утверждение:

Утверждение 8. Функция $G(T)$, где $T = e^{L(k,\omega,x,t)} E$, E - ривертон, а $L(k,\omega,x,t) = (k,x) + \omega t$, при выполнении тех же условий (18) и (20) удовлетворяет уравнению

$$\Diamond_{R_0} G(T) = (G'(T) + G''(T)T)\left[(\mu - \lambda\omega)T + \lambda T_t\right]. \tag{21}$$

Этот тип решений будем называть мультипликативно модифицированным ривертоном.

9 Заключение

В работе построен новый класс точных решений нелинейных гиперболических уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами в произвольной координатной размерности. Новый класс решений - ривертоны, строится как вещественное решение задачи Коши системы квазилинейных уравнений первого порядка. Ривертоны представляют собой плоские волны с произвольно заданной траекторией направления распространения фронта волны. Универсальность построенного класса решений состоит в том, что он существует для очень широкого класса нелинейных гиперболических уравнений второго порядка, включающего целый ряд важных с точки зрения приложений уравнений математической физики. К ним, в частности, относятся уравнения распространения электромагнитных волн в среде с нелинейной поляризацией и проводимостью, нелинейных акустических волн, а так же гидродинамические уравнения. При сравнительно простой форме описания ривертонов их структура оказывается достаточно сложной и содержит два основных элемента. Первый - это опрокидывающаяся волна с плоским фронтом, а второй элемент - статическое, неизменное во времени расположение областей однозначности и многозначности решений. В работе приведено общее решение проблемы расположения в пространстве областей однозначности и многозначности с помощью вычисления огибающей множества точек пересечения бесконечно близких гиперплоскостей плоскостей уровня. Вместе с тем в работе не рассматривался вопрос о том, какие граничные условия выделяют ривертоны среди всех других возможных решений уравнений, допускающих такие решения. Это, в частности, относится и к уравнениям типа Д'Аламбера. Этот вопрос имеет важное значение для прикладных задач, но требует отдельного анализа, который выходит за рамки данной работы.

Наиболее существенным свойством ривертонов является их относительная универсальность как по отношению к размерности координатного пространства, так и по отношению к типу уравнений. Как показано в работе, при небольших модификациях ривертонов они становятся решениями большого класса нелинейных уравнений типа Клейна-Гордона в размерности $n+1$ и нелинейных телеграфных уравнений. Это указывает на то, что явления, связанные с опрокидыванием волн и их многозначностью, являются достаточно распространенными среди уравнений гиперболического типа и присущи даже линейным уравнениям этого типа.

Настоящая работа выполнена в рамках федеральных целевых программ ``Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно технологического комплекса России на 2007-2012 годы'' и ``Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 год'', а так же работ в рамках государственного задания Минобрнауки России» №2.1894.2011 и при частичной поддержке РФФИ (проект 11-01-00747-а).

References

[1] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: ``Наука'', 1978

[2] А.Г. Куликовский, Е.И. Свешникова, А.П. Чугайнова. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений. М.: МИАН, 2011

[3] Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1978

[4] О.И. Богоявленский. Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. М.: Наука, 1991.

[5] И.Г. Катаев. Ударные электромагнитные волны. М.: Советское радио, 1963. 148 С.

[6] А.А. Акопов, Д.Л. Оганесян. Квантовая электроника, 24 , N 7, 622-624 (1997)

[7] R. Penrose, W. Rindler. Spinors and space-time. Spinor and twistor methods in space-time geometry. Cambridge University Press, 1986.

[8] V.V. Kassandrov, in: Space-Time Structure: Algebra and Geometry, eds. D.G. Pavlov et al. – Lilia Print, Moscow, 2007, p. 422; www.arxiv.org, hep-th/0312278; Physics of Atomic Nuclei, 2009, Vol. 72, No. 5, pages 813-827

[9] В.М. Журавлев Известия вузов. Серия Прикладная нелинейная динамика.-2001.-Т.9.-N6.-С. 115-128

[10] В.М. Журавлев. Опрокидывающиеся электромагнитные волны в диэлектриках и проводящей среде. Труды XLVIII Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники посвящается 100-летию профессора Я.П. Терлецкого.Москва, май 2012 г., с. 137

[11] С. П. Царев. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1990, том 54, выпуск 5, страницы 1048–1068

[12] Е. В. Ферапонтов, К. Р. Хуснутдинова, М. В. Павлов Теоретическая и математическая физика, 2005, т. 144, № 1, с. 35–43

[13] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, Commun. Math. Phys., 248 (2004), 187–206; J. Phys. A, 37 (2004), 2949–2963; J. Math. Phys., 45 (2004), 2365–2377