УДК 53.01+524+52-33+51-71

МОДЕЛИ ДИНАМИКИ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА*

Журавлев В. М.[a,b,1]

[a] Самарский национальный исследовательский университет, г. Самара, 443086, Россия.
[b] Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск, 432970, Россия.

С помощью метода гидродинамических подстановок строится решение задачи о динамике самогравитирующего газа с баротропным уравнением состояния. Поток газа описывается законом Хаббла. Задача решается в рамках классической теории тяготения. Устанавливается связь с теорией Эмдена-Лейна звездных политроп.

Ключевые слова: Динамика самогравитирующего газа, теория гравитации Ньютона, поток Хаббла, космология, эволюция звездных атмосфер.

MODELS OF THE DYNAMICS OF A SELF-GRAVITATING POLYTROPIC GAS

Zhuravlev V. M.[a,b,1]

[a] Samara National Research University, Samara, 443086, Russia.
[b] Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432970, Russia.

Using the method of hydrodynamic substitutions, a solution to the problem of the dynamics of a self-gravitating gas with a barotropic equation of state is constructed. Gas flow is described by Hubble's law. The problem is solved within the framework of the classical theory of gravitation. A connection is established with the Emden-Lane theory of stellar polytropes.

Keywords: Dynamics of self-gravitating gas, Newton's theory of gravity, Hubble's flow, cosmology, evolution of stellar atmospheres.

PACS: 04.40.-b, 04.20.Jb, 97.10.Cv, 95.30.Lz, 98.80.-k
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2020.4.10-22

Введение

В работах [1–3] был предложен новый подход к описанию космологических моделей с пылевой материей в пространственно-плоской Вселенной. Подход основывался на использовании метода гидродинамических подстановок [2, 3] для построения точных решений динамики самогравитирующей пыли. В настоящей работе данный метод применяется к решению космологических и астрофизических задач, связанных с динамикой газовой среды в адиабатическом режиме.

1. Модель самогравитирующего газа

Задача о расширении самогравитирующих пыли и газа в рамках классической механики [4–9] сводится к решению уравнения Эйлера течения идеальной жидкости вместе с уравнением сохранения массы вещества и уравнением Пуассона для поля тяготения. Первое из этих уравнений для

*Работа выполнена в рамках проекта 0777-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России и частично в рамках проекта РФФИ 20-02-00280.

[1] E-mail: zhvictorm@gmail.com

случая сферически-симметричного течения будет иметь такой вид:

$$u_t + uu_r = -\phi_r - \frac{1}{\rho}P_r. \tag{1.1}$$

Здесь $u(r,t)$ — скорость радиального потока на расстоянии r от центра в момент времени t, $\phi(r,t)$ — гравитационный потенциал, создаваемый материей, и $P(r,t)$ — давление газа. Будем предполагать, что давление газа в среде будет подчиняться уравнению состояния $P = P(\rho, t)$ для адиабатических процессов с изменяющимися со временем характеристиками. Уравнение неразрывности в сферической системе координат будет иметь такой вид:

$$\rho_t + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 u\rho\Big) = 0. \tag{1.2}$$

Поскольку в данной модели источником гравитационного поля является сам газ, то к данной системе уравнений необходимо добавить еще и уравнение для гравитационного потенциала в форме уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\phi_r\Big) = 4\pi G r^2\rho. \tag{1.3}$$

Для анализа системы (1.1) и (1.2) полезно ввести функцию $\varrho = r^2\rho$. В этом случае пара уравнений примет такой вид:

$$\begin{aligned} &u_t + uu_r = -\phi_r - \frac{P'(\rho)}{\rho}\rho_r, \quad \varrho_t + (\varrho u)_r = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\phi_r\Big) = 4\pi G\varrho. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Полученная система уравнений описывает сферически-симметричное течение Хаббла самогравитирующего газа. В случае, если течение исчезает, то данная система уравнений при условии адиабатического уравнения состояния газа приводит, как хорошо известно [8], к теории Эмдена-Лейна (ТЭЛ) звездных политроп. В рассматриваемом случае модель, включающая поток Хаббла, может рассматриваться и как астрофизическая задача о звездном ветре, так и космологическая модель неограниченного расширения газа. Как будет показано далее, эти два типа модели соответствуют определенному выбору параметров модели. При этом уравнения автомодельного распределения плотности, давления и температуры в системе будут описываться обобщенным уравнением Эмдена-Лейна.

2. Метод гидродинамических подстановок

Метод гидродинамических подстановок [1–3] опирается на то, что гидродинамический поток, соответствующий системе (1.4), может быть описан в терминах гидродинамических маркеров. Для этого введем в рассмотрение функцию $\theta(r,t)$, которая удовлетворяет уравнению переноса маркеров:

$$\theta_t + u\theta_r = 0. \tag{2.1}$$

Дифференцируя это соотношение по r, приходим к следующему тождеству:

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta_r + \frac{\partial}{\partial r}\Big(u\theta_r\Big) = 0. \tag{2.2}$$

Сравнивая его с уравнением сохранения массы, приходим к выводу, что функцию R можно отождествить с функцией θ_r, полагая:

$$\varrho = \theta_r. \tag{2.3}$$

Отсюда:

$$\rho = \theta_r/r^2. \tag{2.4}$$

Используя последнее уравнение в (1.4) (уравнение Пуассона), находим:

$$\phi_r = 4\pi G \frac{\theta + \theta_0(t)}{r^2},$$

где $\theta_0(t)$ — постоянная интегрирования по r, зависящая произвольным образом от t. Подставляя полученные соотношения в уравнение Эйлера, приходим к уравнению следующего вида:

$$u_t + uu_r = -4\pi G \frac{\theta + \theta_0(t)}{r^2} - \frac{P'(\rho)}{\rho}\rho_r. \tag{2.5}$$

Таким образом, исходная система уравнений свелась к одному уравнению для функции $\theta(r,t)$ с учетом (2.1) и (3.4).

3. Поток Хаббла

Искать решение (2.5) будем в форме космологической задачи о глобальном или космологическом расширении газа из некоторого начального состояния, которое определяется начальным значением функции $\theta(r,0)$. Решение для скорости потока при космологическом расширении газа будем искать в следующем виде:

$$u = H(t)r. \tag{3.1}$$

Такой поток называется потоком Хаббла, а функция $H(t)$ — параметром Хаббла. Подставляя это выражение в (2.1), приводим это уравнение к следующему виду:

$$\theta_t + Hr\theta_r = 0. \tag{3.2}$$

Это уравнение имеет общее решение следующего вида:

$$\theta = \Theta(r/a(t)), \tag{3.3}$$

где $\Theta(\xi)$ — произвольная пока функция безразмерного аргумента $\xi = r/a(t)$, а $a(t)$ часто называют масштабным фактором, который связан с параметром Хаббла $H(t)$ соотношением:

$$H = \frac{\dot a}{a}$$

и имеет размерность длины.

В соответствии с (3.3) вычисляем плотность материи:

$$\rho = \frac{\theta_r}{r^2} = \frac{1}{a^3}\frac{\Theta'(\xi)}{\xi^2}. \tag{3.4}$$

Подставляя (3.1) и (3.3) в (2.5), с учетом (3.4) приходим к следующему уравнению:

$$(\dot H + H^2)a\xi = -4\pi G \frac{(\Theta(\xi) + \theta_0(t))}{a^2\xi^2} - \frac{\xi^2 a^2(t)}{\Theta'}\frac{\partial}{\partial\xi}P\left(\frac{\Theta'(\xi)}{a^3(t)\xi^2}\right). \tag{3.5}$$

4. Разделение переменных

Рассмотрим случай идеального газа, для которого уравнение состояния имеет следующий стандартный вид:

$$P(\rho,t) = K(t)\rho^\gamma, \tag{4.1}$$

где $\gamma \neq 0$ — коэффициент адиабаты. Функция $K(t)$ для случая идеального газа связана с температурой среды в точке, где плотность среды соответствует некоторому фиксированному значению ρ_0. Действительно, величина $K(t)$ может быть определена соотношением:

$$K(t) = P(\rho_0,t)\rho_0^{-\gamma} = \frac{A}{\mu(t)}T_0(t)\rho_0^{1-\gamma}, \tag{4.2}$$

где $T_0(t)$ — абсолютная температура среды в точке, где плотность равна ρ_0, A — универсальная газовая постоянная, а $\mu(t)$ — молярная масса газа, которая может в некоторых моделях изменяться со временем. В ситуациях, когда уравнение состояния вещества не зависит от температуры, требуется дополнительный анализ. Гипотеза, соответствующая (4.1) и (4.2), **требует отдельного обсуждения, что и будет сделано в конце статьи.**

Подставляя это соотношение в (3.5), при $\gamma \neq 1$ преобразуем это уравнение к следующему виду:

$$(\dot{H} + H^2)a\xi = -4\pi G\frac{(\Theta(\xi) + \theta_0(t))}{a^2\xi^2} - \frac{\gamma K(t)}{(\gamma-1)a^{3\gamma-2}(t)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\Theta'(\xi)}{\xi^2}\right)^{\gamma-1}. \tag{4.3}$$

Для того, чтобы существовало общее решение этого уравнения, потребуем выполнения условий:

$$K(t) = K_0 a^{3\gamma-4}, \quad \theta_0(t) = \mathrm{const}. \tag{4.4}$$

В этом случае переменные в этом уравнении разделяются. Для $a(t)$ в результате имеем уравнение типа уравнения Фридмана:

$$\dot{H} + H^2 = 4\pi G\frac{\mu}{a^3}, \tag{4.5}$$

где μ - постоянная разделения, имеющая размерность массы. Для функции $\Theta(\xi)$ получаем следующее уравнение:

$$4\pi G\left(\mu\xi + \frac{\Theta(\xi) + \theta_0}{\xi^2}\right) + \frac{\gamma K_0}{(\gamma-1)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\Theta'(\xi)}{\xi^2}\right)^{\gamma-1} = 0. \tag{4.6}$$

В особом случае $\gamma = 1$, последнее уравнение примет такой вид:

$$4\pi G\left(\mu\xi + \frac{\Theta(\xi) + \theta_0}{\xi^2}\right) + K_0\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\left(\frac{\Theta'(\xi)}{\xi^2}\right) = 0. \tag{4.7}$$

Этот случай соответствует пространственно-изотермическому течению идеального газа с изменяющейся со временем температурой.

5. Уравнения для коэффициента плотности среды

Для удобства анализа полученного уравнения для функции $\Theta(\xi)$ введем новую безразмерную переменную $R = \xi^{-2}\Theta'(\xi)/M_0$, которая представляет собой зависящий от координаты множитель в записи плотности среды:

$$\rho = a^{-3}(t)M_0 R(\xi),$$

где M_0 — некоторая постоянная размерности массы. Функцию $R(\xi)$ будем называть коэффициентом плотности среды. Умножим уравнение (4.6) на ξ^2 и продифференцируем результат по переменной ξ. Поделив полученный результат на ξ^2, приходим к уравнению:

$$\lambda + R + \kappa\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\frac{\partial}{\partial\xi}R^{\gamma-1}\right) = 0, \tag{5.1}$$

которое является аналогом уравнений ТЭЛ звездных политроп [8] с дополнительным слагаемым, ответственным за радиальный гидродинамический поток, в котором роль радиальной координаты играет переменная $\xi = ra^{-1}(t)$. Это слагаемое очевидно возникает в данной модели как результат нестационарности среды. В (5.1) введены дополнительные обозначения:

$$\lambda = \frac{3\mu}{M_0}, \quad \kappa = \frac{M_0^{\gamma-2}\gamma K_0}{4\pi G(\gamma-1)}.$$

По аналогии с ТЭЛ введем вместо ξ новую переменную z: $\xi = \sqrt{\kappa}z$. В результате уравнение (5.1) примет следующий вид:

$$\frac{1}{z^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(z^2\frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q^n + \lambda = 0, \tag{5.2}$$

где $Q = R^{\gamma-1}$ и $n = 1/(\gamma - 1)$ — показатель политропы. Для политроп идеального газа связь функций $Q(z)$ и $R(z)$ соответствует связи температуры и плотности. Поэтому $Q(z)$ будем называть коэффициентом температуры среды.

Аналогично, уравнение (4.7) для $\gamma = 1$ приводится к такому виду:

$$\frac{1}{z^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(z^2\frac{\partial Q}{\partial z}\right) + e^Q + \lambda = 0, \tag{5.3}$$

где:

$$z = \sqrt{\frac{4\pi G}{K_0}}\xi.$$

Уравнения (5.2) и (5.3) будем называть уравнениями для коэффициента температуры среды $Q(z)$.

Основным отличием уравнений данной модели от уравнений ТЭЛ является то, что параметры среды в каждой точке пространства зависят от времени: $z = a^{-1}(t)r/\sqrt{\kappa}$ в соответствии с законом Хаббла. Таким образом, распределение плотности, температуры и давления в среде в данной модели является автомодельным. Вторым отличием модели от ТЭЛ является наличие постоянного слагаемого λ, также связанного с потоком Хаббла. Параметр λ может быть как положительным, так и отрицательным, что определяет и общий характер эволюции параметров среды со временем, так и их распределение в пространстве.

6. Уравнение для масштабного фактора

Знак параметра λ существенно связан с асимптотическим поведением системы при $\to \infty$. Для случая модели с пылевой материей, которая рассматривалась в [2], когда $p = 0$, единственным решением системы является вариант $\rho = 3\mu/a^3$ с $\mu > 0$. В этом случае асимптотическое поведение системы таково, что при почти любом начальном значении масштабного фактора $a(t_0)$ и параметра Хаббла $H(t_0)$ система сжимается при $t \to \infty$. Хотя, если в начальный момент времени $H(t_0) > 0$, то неизбежно после конечного отрезка расширения происходит неограниченное сжатие газа. Аналогичное поведение системы наблюдается и в случае $\mu > 0$, и в рассматриваемой расширенной модели. Для иллюстрации этого наблюдения рассмотрим фазовые портреты системы (4.5) на плоскости $a, \dot{a}$.

Перепишем уравнение (4.5) в следующей форме:

$$\ddot{a} = -\frac{m}{a^2}, \quad m = 4\pi G M_0 \lambda/3. \tag{6.1}$$

Это уравнение имеет интеграл движения следующего вида:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{m}{a} = E, \tag{6.2}$$

где $v = \dot{a}$ и E — постоянная интегрирования — аналог энергии механических систем. Траектории системы, соответствующие различным значениям E для случая $m = 1$ представлены на рис. 1.

Рис. 1 иллюстрирует эволюцию формирующегося потока газа в системе с необратимым падением его на центр при $t \to \infty$. Этот вариант эволюции соответствует неограниченному коллапсу системы.

7. Космологический газовый поток Хаббла

Другой вариант эволюции распределения плотности соответствует выбору значений параметра разделения m в отрицательной области. Траектории системы, соответствующие различным значениям E для случая $m = -1$ представлены на рис. 2.

Как следует из рис. 2при $m < 0$ асимптотическое поведение системы соответствует неограниченному расширению газа. Даже, если в начальный момент времени параметр Хаббла H отрицателен, то есть газ сжимается в начальный момент времени, тем не менее, после достижения

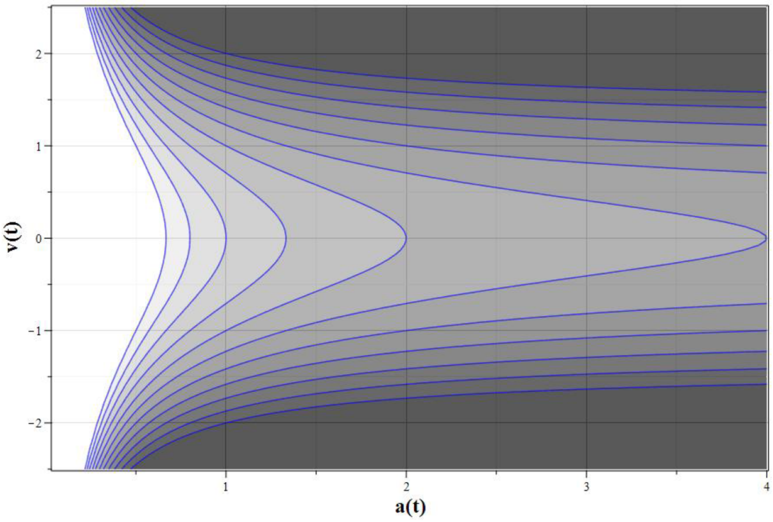

Рис. 1. Фазовый портрет системы для $m = 1$

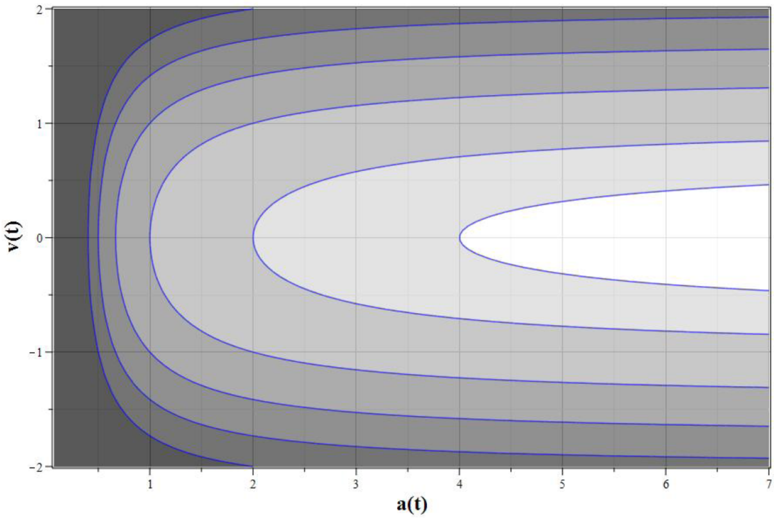

Рис. 2. Фазовый портрет системы для $m = -1$

определенного уровня сжатия, газ начинает расширяться неограниченно. Именно такое поведение характерно для космологической динамики материи.

Используя (6.2), находим:

$$H = \sqrt{\frac{2(m + Ea)}{a^3}}, \tag{7.1}$$

$$\dot{H} = -\frac{m + 2Ea}{a^3}. \tag{7.2}$$

Эти соотношения показывают, что параметр Хаббла является вещественной величиной только в случае, если масштабный фактор будет больше величины $a_* = |m|/E$. Точки, соответствующие условию $H = 0$, лежат на оси абсцисс на фазовых портретах систем (2) и отделяют режимы сжатия и последующего расширения. Для всех вариантов выбора параметров $m < 0$ и $E > 0$ асимптотически параметр Хаббла стремится к нулю, т.е. в пределе система перестает расширяться. Эти особенности поведения иллюстрируют графики на рис. 3 и 4. На рис. 3 отдельные кривые соответствуют различным значениям параметра E, что аналогично фазовым кривым на рис. 2. На рис. 4 представлены кривые для различных отрицательных значений параметра m при фиксированном $E = 1$.

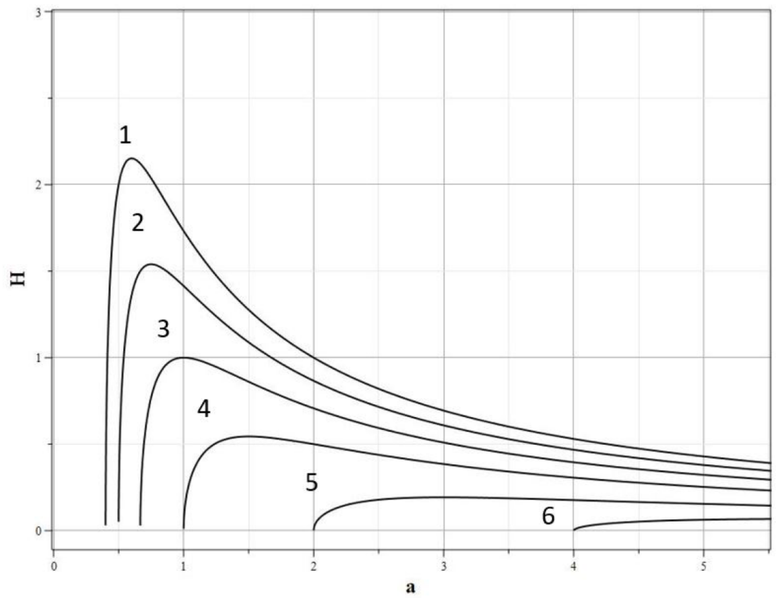

Рис. 3. Графики изменения параметра Хаббла в зависимости от a при $m = -1$ для значений E: 1 - $E = 2.5$, 2 - $E = 2.0$, 3 - $E = 1.5$, 4 - $E = 1.0$, 5 - $E = 0.5$, 6 - $E = 0.25$

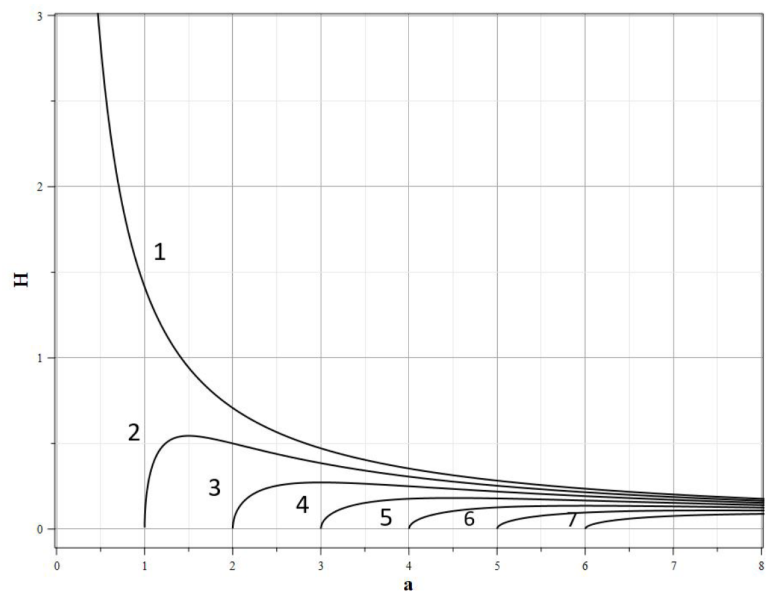

Рис. 4. Графики изменения параметра Хаббла в зависимости от a при $E = 1$ для значений m: 1) - $m = 0.0$, 2) - $m = -1.0$, 3) - $m = -2.0$, 4) - $m = -3.0$, 5) - $m = -4.0$, 6) - $m = -5.0$, 7) -$m = -6.0$

На рис. 5 представлен график параметра ускорения расширения $\dot{H}$. Как следует из графиков на этом рисунке, ускорение расширения также стремится к нулю, что соответствует Фридмановскому режиму расширения в космологии Общей теории относительности [9]. Но данное решение нельзя непосредственно отнести к стандартному режиму космологического расширения, поскольку

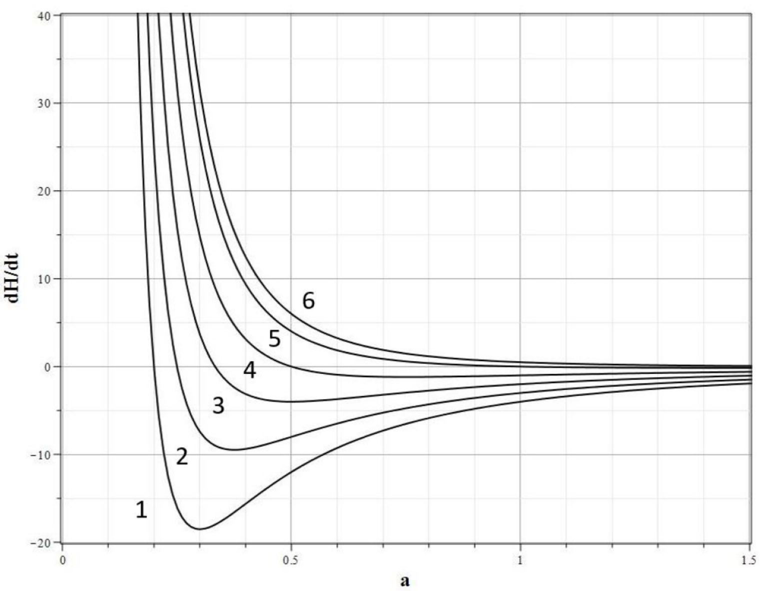

Рис. 5. График изменения $\dot{H}$ в зависимости от a при $m = -1$ для значений E: 1 - 2.5, 2 - 2.0, 3 - 1.5, 4 - 1.0, 5 - 0.5, 6 - 0.25

плотность газа меняется в пространстве.

8. Распределение плотности и температуры в пространстве

Для анализа автомодельного распределения плотности и температуры в среде рассмотрим решения обобщенного уравнения Эмдена-Лейна (5.2) при стандартных граничных условия теории звездных политроп, которое сводится к двум условиям:

$$Q(0) = 1, \quad Q'(0) = 0.$$

Первое из этих условий просто фиксирует значение плотности среды в центре поля, а второе указывает на отсутствие в центре системы сингулярности в плотности среды при всех $t < \infty$. Сингулярность в центре системы может сформироваться лишь при $t \to \infty$.

Анализ распределения величины $Q(z)$ по z будем проводить для типичных газовых политроп, характерных для астрофизики и космологии. Типичной газовой политропой для астрофизики является одноатомный газ с $\gamma = 5/3$ и $n = 3/2$. Для некоторых ситуаций полезно рассмотреть и случай $\gamma = 4/3$ с $n = 3$. Вариант $\gamma = 4/3$ реализуется для среды ультрарелятивистских белых карликов. В рассматриваемой модели этот случай выделен тем, что параметр $K(t)$ в уравнении состояния вещества оказывается постоянным, что не требует введения специальных предположений относительно характера изменения баротропного уравнения состояния со временем.

8.1. Звездные политропы

Характер пространственного распределения плотности, как и динамика расширения, существенным образом отличаются при изменении знака параметра m или, что одно и тоже, параметра λ. В случае положительных m и λ динамика газа соответствует асимптотическому падению газа на центр, что характерно для звезд. Поэтому этот режим можно отнести к моделям звездных политроп.

На рис. 6 и 8 приведены графики $Q(z)$ для набора положительных значений параметра $\lambda = 3m/(4\pi GM_0) \geq 0$. Рис. 6 соответствует $\gamma = 5/3$ и $n = 3/2$, а 8 - $\gamma = 4/3$ и $n = 3$. Значение $\lambda = 0$

соответствует стандартной ТЭЛ. Решением уравнения (6.1) для масштабного при $\lambda = 0$ ($m = 0$) является в общем случае линейная зависимость $a = a(t) = a_0 + h_0 t$. В случае $h_0 = 0$ приходим к статической ТЭЛ. Но существование варианта $h_0 \neq 0$ указывает на неустойчивость модели ТЭЛ по отношению к Хаббловскому сжатию звезды. Однако этот вопрос требует отдельного анализа.

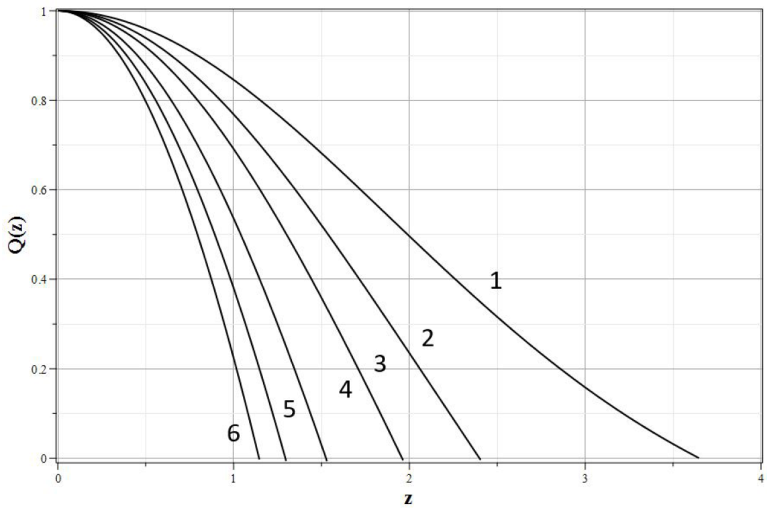

Рис. 6. Зависимость $Q(z)$ от z при $\gamma = 5/3$ для значений λ: 1) - $\lambda = 0$, 2) -$\lambda = 0.5$, 3) -$\lambda = 1.0$, 4) -$\lambda = 2.0$, 5) -$\lambda = 3.0$, 6) -$\lambda = 4.0$

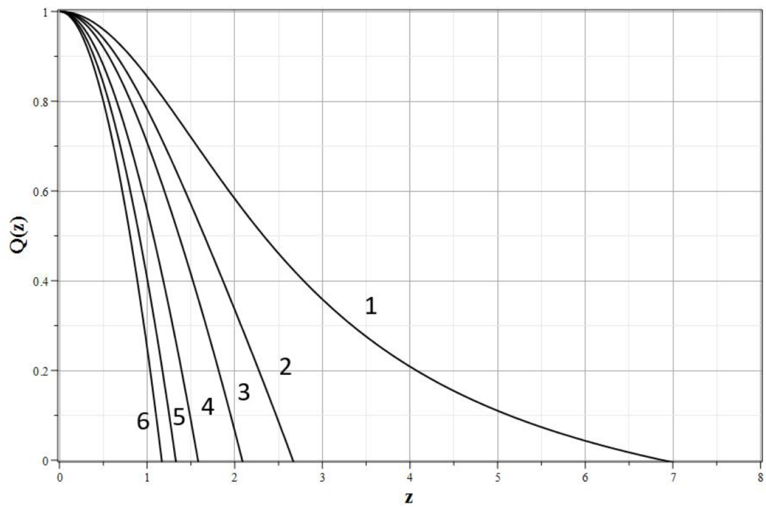

Рис. 7. Зависимость $Q(z)$ от z при $\gamma = 4/3$ для значений λ: 1) - $\lambda = 0$, 2) -$\lambda = 0.5$, 3) -$\lambda = 1.0$, 4) -$\lambda = 2.0$, 5) -$\lambda = 3.0$, 6) -$\lambda = 4.0$

Анализ графиков распределения коэффициента температуры $Q(z)$ для $\lambda > 0$ показывает, что структура распределения плотности и температуры в данных моделях подобна распределениям плотности и температуры для ТЭЛ. Действительно, для всех λ и при $\gamma = 5/3$, и при $\gamma = 4/3$, существует значение автомодельной координаты $z = z_* = r_*(t)/a(t)$, в которой плотность обращается в ноль, что в ТЭЛ интерпретируется как наличие границы звезды. Т.е. $r_*(t) = z_* a(t)$ есть радиус звезды, который при $\lambda = 3m/(4\pi G M_0) \geq 0$ будет неограниченно уменьшаться из-за $a(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Поскольку на фазовом портрете $(a, \dot{a})$ для $\lambda > 0$ в случае начального условия $\dot{a}(t_0) > 0$

имеется участок расширения звезды, то представленная модель может описывать ситуацию начального расширения звезды с последующим ее коллапсом.

Как хорошо известно из ТЭЛ [8], существование поверхности политропной звезды возможно лишь при $\gamma \geq 4/3$. Для выяснения того, какую роль играет параметр $\lambda > 0$ для моделей с $\gamma < 4/3$, требуется отдельный анализ. Хотя исследование вариантов с γ отличных от случая одноатомного газа $\gamma = 5/3$ и $\gamma = 4/3$ является важным с точки зрения общего понимания устойчивости решений звездных политроп, тем не менее, эта проблема выходит за рамки данной работы.

8.2. Космологическое расширение

В отличие от моделей с $\lambda > 0$ модели с отрицательными значениями этого параметра демонстрируют иное асимптотическое поведение $Q(z)$ при $z \to \infty$. Самым важным является то, что при $z \to \infty$ величина $Q(z)$ стремится к постоянному значению, которое определяется формулой:

$$q_\infty = Q(\infty) = |\lambda|^{1/n}. \tag{8.1}$$

Учитывая это обстоятельство, асимптотическое решение уравнения (5.2) можно искать в таком виде:

$$Q(z) = q_\infty + q(z),$$

где $|q(z)| << 1$. В результате уравнение для $q(z)$ линеаризуется. Если ввести вместо $q(z)$ функцию $w = zq(z)$, то для $w(z)$ уравнение приводится к следующему виду:

$$w'' + nq_\infty^{n-1} w = 0.$$

Отсюда находим, что решение для $w(z)$ будет иметь такой вид:

$$w = W_0 \sin(Kz),$$

и, соответственно, для $q(z)$ - следующий:

$$q = W_0 \frac{1}{z} \sin(Kz). \tag{8.2}$$

Здесь $K = \sqrt{nq_\infty^{n-1}} = \sqrt{n}|\lambda|^{(n-1)/(2n)}$. Параметр K определяет длину осцилляций плотности при $z \to \infty$. Значение W_0 находится из граничного условия $Q(0) = 1$:

$$W_0 = \frac{1 - q_\infty}{K} = \frac{1 - |\lambda|^{1/n}}{K}.$$

В частности, для всех n при $\lambda = 1$ из последнего соотношения следует: $W_0 = 0$, что эквивалентно отсутствию пространственных осцилляций.

На рис. 8 и 9 представлены графики изменения $Q(z)$ для различных значений λ для одноатомного газа с $\gamma = 5/3$ и газа с $\gamma = 4/3$. Кривые на этих графиках демонстрируют все основные особенности пространственного распределения температуры, рассмотренные выше. В частности, при $\lambda = 1$ в пространственном распределении $Q(z)$ отсутствуют осцилляции.

Общий вывод, который можно сделать, исходя из проведенного анализа динамики газа для отрицательных значений λ состоит в том, что рассматриваемая модель описывает расширение газа, аналогичное космологическим моделям Фридмана [9]. В рамках космологических моделей Фридмана плотность материи во Вселенной представляется почти однородной. Аналогично, кривые изменения коэффициента температуры в данных моделях демонстрируют ситуацию, когда вдали от центра расширения плотность газа стремится к постоянному значению, которое и определяется параметром модели λ. При этом в плотности наблюдаются осцилляции с характерной длиной волны: $L = 2\pi/K = 2\pi a(t)|\lambda|^{-(n-1)/(2n)}/\sqrt{n}$, которая зависит, кроме λ, еще и от показателя политропы n, а также увеличивается со временем в силу зависимости автомодельной координаты

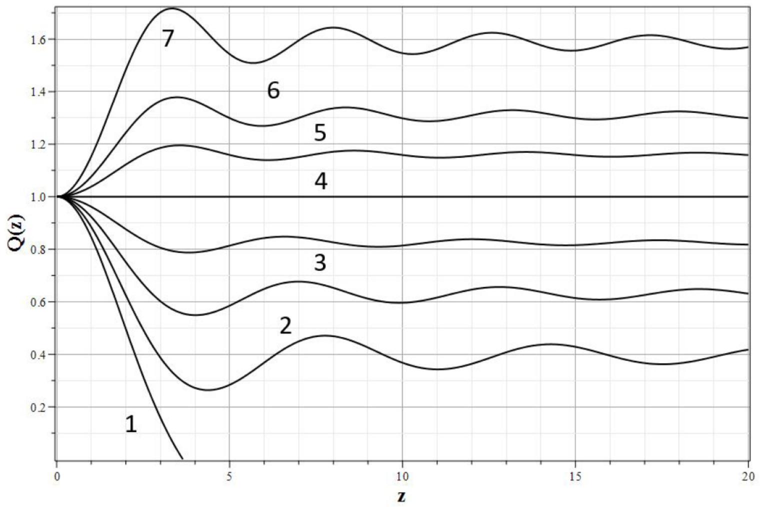

Рис. 8. Зависимость $Q(z)$ от z при $\gamma = 5/3$ для значений λ: 1) - $\lambda = 0$, 2) -$\lambda = -0.25$, 3) -$\lambda = -0.5$, 4) -$\lambda = -0.75$, 5)-$\lambda = -1.0$, 6) -$\lambda = -1.25$, 7) -$\lambda = -1.5$

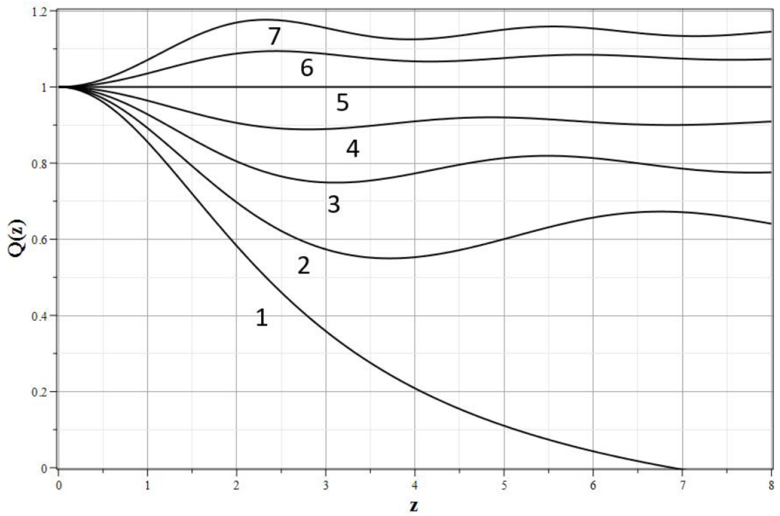

Рис. 9. Зависимость $Q(z)$ от z при $\gamma = 4/3$ для значений λ: 1) - $\lambda = 0$, 2) -$\lambda = -0.25$, 3) -$\lambda = -0.5$, 4) -$\lambda = -0.75$, 5)-$\lambda = -1.0$, 6) -$\lambda = -1.25$, 7) -$\lambda = -1.5$

от $z = z/a(t)$ от времени. Кривые на рис. (8) со временем растягиваются вдоль радиальной оси r. При этом сингулярности в центре системы не возникает. Таким образом, представленная модель в действительности описывает космологический поток Хаббла в рамках классической теории гравитации.

Заключение

В работе построена и проанализирована модель потока Хаббла для самогравитирующего газа, которая позволяет рассматривать как задачу о космологическом расширении, так и задачу о падении газа на звезду. Как показано, исследованная модель при положительных значениях параметра m (или λ) имеет прямую связь с теорией звездных политроп Эмдена-Лейна и обобщает ее на случай существования гидродинамического потока Хаббла истечения газа со звезды или падения газа на звезду. Таким образом, такие модели являются нестационарным вариантом теории Эмдена-Лейна.

Модели с отрицательными значениями λ (или m) представляют собой аналог космологических моделей для Вселенной, заполненной газом с баротропным уравнением состояния, но в рамках классической теории тяготения. Если рассматривать космологические пространственно-плоские модели Фридмана, то существенного отличия от рассматриваемых в данной работе такие модели иметь не будут, за исключением существования космологического горизонта событий. Кроме этого, в отличие от классических моделей Фридмана, рассмотренные здесь модели соответствуют лишь асимптотически однородному пространству и содержат осцилляции плотности, характерные для теории возмущений в рамках моделей Фридмана. В целом можно констатировать, что рассмотренные модели могут служить полезным инструментом для анализа ряда задач астрофизики и космологии.

Работа выполнена в рамках проекта 0777-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России и частично в рамках проекта РФФИ 20-02-00280.

Список литературы

1. Журавлев В.М. Модели динамики пылевидной материи в собственном поле тяготения. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2017. № 1. С. 5–19.

2. Журавлев В.М. Модели динамики пылевидной материи в собственном гравитационном поле. Метод гидродинамических подстановок. *ЖЭТФ*, 2017. Т. 152. Вып. 3(9). С. 495–510

3. Журавлев В.М. *Нелинейные интегрируемые модели физических процессов. Метод функциональных подстановок.* Издательство УлГУ, 2020. 182 С.

4. McCrea W., Milne E. *Quart. J. Math.*. 1934. № 5. P. 73.

5. Озерной Л.М., Прилуцкий О.Ф., Розенталь И.Л. *Астрофизика высоких энергий.* М.: Атомиздат, 1973.

6. Gurevich A.V., Zybin K.P., Medvedev Yu.V. Nonlinear theory of the Jeans instability in a cold nondissipative medium. *JETP.* 1993. Vol. 77. № 4. Pp. 593–801.

7. Гуревич А.В., Зыбин К.П. Крупномасштабная структура Вселенной. Аналитическая теория. *УФН.* 1995. № 165. С. 723–758.

8. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. *Теория тяготения и эволюция звезд.* М.: Наука, 1971.

9. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. *Строение и эфолюция Вселенной.* М.: Наука, 1975.

References

1. Zhuravlev V.M. Modeli dinamiki hylevidnoy materii v sobstvennom pole tyagoteniya. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2017, no. 1, pp. 5–19. (in Russian)

2. Zhuravlev V.M. Modeli dinamiki hylevidnoy materii v sobstvennom pole tyagoteniya. Metod gidrodinamicheskikh podstanovok. *JETP*, 2017, vol. 152, no. 3(9), pp. 495–510. (in Russian)

3. Zhuravlev V.M. Nelineynye integriruemye modeli fizicheskikh processov. Metod funktcionalnykh podstsnovok. Ulyanovsk: Izdatelstvo Ulyanovskogo gosudarstvennogo universiteta, 2020. 182 p. (in Russian)

4. McCrea W., Milne E. *Quart. J. Math.*, 1934, no. 5, p. 73.

5. Ozernoy L.M., Prilutckiy O.F., Rozental I.L. *Astropfizika vysokikh energiy.* Moscow: Atomizdat Publ., 1973. (in Russian)

6. Gurevich A.V., Zybin K.P., Medvedev Yu.V. Nonlinear theory of the Jeans instability in a cold nondissipative medium. *JETP*, 1993, vol. 77, no. 4, pp. 593–801.

7. Gurevich A.V., Zybin K.P. Krupnomasshtabnaya struktura Vselennoiy. Analiticheskaya teoriya. *UFN*, 1995, vol. 165, pp. 723–758. (in Russian)

8. Zeldovich Ya.B. , Novikov I.D. *Teorya tyagoteniya i evolutciay zvezd.* Moscow: Nauka Publ., 1971. (in Russian)

9. Zeldovich Ya.B., I.D. Novikov. *Stroenie i evolutciya Vselennoyi.* Moscow: Nauka Publ., 1975. (in Russian)

Авторы

Журавлев Виктор Михайлович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Самарский национальный исследовательский университет, Московское шоссе, 34, г. Самара, 443086, Россия; профессор, кафедра теоретической физики, Ульяновский государственный университет, ул. Льва Толстого, 42, г. Ульяновск, 432970, Россия.
E-mail: zhvictorm@gmail.com

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Журавлев В. М. Модели динамики самогравитирующего политропного газа. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2020. № 4. С. 10—22.

Authors

Zhuravlev Victor Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Inter-University Department of Space Research, Samara National Research University, Samara, 443086, Russia; Department of Theoretical Physics, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432970, Russia.
E-mail: zhvictorm@gmail.com

Please cite this article in English as:

Zhuravlev V. M. Models of the dynamics of a self-gravitating polytropic gas. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2020, no. 4, pp. 10–22.