

УДК 53.01+530.145.1+537.112+539.1+51-71

**В. М. Журавлев**<sup>1</sup>**КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СО СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ**<sup>2</sup>

В работе проводится качественный анализ космологических моделей со скалярным полем и веществом, имеющим баротропное уравнение состояния. Предполагается, что потенциал самодействия скалярного поля является произвольной функцией поля. Пространство-время предполагается имеет метрику пространственно-плоского пространства Фридмана-Робертсона-Уокера. Уравнения модели представляются в форме уравнений динамической системы первого порядка. Вычисляются особые точки динамической системы и их свойства в первом порядке теории возмущений. Анализируется изменение свойств моделей в зависимости от наличия или отсутствия космологической постоянной.

**Ключевые слова:** космологические модели со скалярным полем и веществом, качественный анализ, асимптотическое поведение, космологическая постоянная.

**PACS:** 02.40.-k, 03.65.-w, 04.50.Kd, 11.90.+t

**Введение**

Качественный анализ динамики космологических моделей [1] позволяет проанализировать эволюцию Вселенной в целом и охарактеризовать параметры ее динамики в пределах  $t \rightarrow \pm\infty$ . Эта информация очень важна с точки зрения отбора моделей по критериям их асимптотического поведения, которые можно установить без непосредственного построения точных или численных решений уравнения космологической динамики. Такой анализ для моделей с материей в виде скалярного поля и смеси релятивистских жидкостей в предположении их теплового равновесия был проделан в работе [2]. Анализ проводился на энергетической плоскости для различных вариантов выбора зависимости полной энергии скалярного поля (суперпотенциала) от самого поля. В работе были проклассифицированы возможные типы космологических моделей на энергетической плоскости и указаны их основные свойства. Несколько иной качественный анализ космологических моделей с массивным скалярным полем на фазовой плоскости самого скалярного поля был проделан в работах [3–5]. С помощью этого анализа был выявлены некоторые важные особенности поведения таких космологических моделей при ненулевой космологической постоянной как вблизи космологической сингулярности, так и при  $t \rightarrow \infty$ . Успешность такого подхода указывает на то, что с его помощью можно проанализировать гораздо более общий тип моделей. Эта задача частично решается в данной работе. В статье приводится качественный анализ космологических моделей со скалярным полем с произвольным потенциалом самодействия, что расширяет область применения результатов, полученных в работах [3–5], на общий случай моделей со скалярным полем. Затем рассматривается расширенная модель с включением жидкости с заданным баротропным уравнением состояния. Это позволяет получить дополнительные результаты о характере эволюции Вселенной с двумя формами материи, что устанавливает определенную взаимосвязь с моделями, рассмотренными в работе [2].

**1. Космологические модели со скалярным полем и жидкостью**

Пространственно-плоские космологические модели со скалярным полем и материей описываются системой уравнения следующего вида [1]:

$$H^2 = \mu \left( \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 + V(\phi) + \Lambda + \varepsilon \right), \quad (1.1)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V'(\phi), \quad (1.2)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = 3\mu \left( p + \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 - V(\phi) - \Lambda \right). \quad (1.3)$$

<sup>1</sup>E-mail: zhvictorm@gmail.com

<sup>2</sup>Работа выполнена при поддержке Министерства Образования и Науки РФ (в рамках Государственного задания и проекта № 14.Z50.31.0015) и за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

Здесь  $a(t)$  - масштабный фактор,  $H = \dot{a}/a$  - параметр Хаббла,  $\phi$  - скалярное поле,  $V(\phi)$  - потенциал самодействия скалярного поля,  $\mu = 8\pi/(3M_p^2)$ ,  $M_p$  - планковская масса,  $\Lambda$  - космологическая постоянная,  $\varepsilon$  и  $p$  - энергия и плотность жидкости, которые предположительно связаны баротропным уравнением состояния:

$$p = \gamma\varepsilon. \quad (1.4)$$

Данная система уравнений в общем случае не интегрируется. Поэтому наиболее полезным способом анализа асимптотического поведения динамики космологических моделей является вычисление их особых (неподвижных точек) и анализа фазовых траекторий вблизи этих точек [6]. Эффективность такого анализа зависит от возможности представить уравнения модели в форме динамической системы, то есть в форме системы уравнений первого порядка по времени и получения исчерпывающей информации относительно ее особых точек. Эта возможность определяется сложностью модели, то есть числом включенных в нее материальных компонент и метрики. **Один из вариантов такой модели и был исследован в [4, 5].** Мы начнем анализ с общего случая скалярного поля с произвольным потенциалом самодействия  $V(\phi)$ , а затем будем включать в другие элементы общей модели, соответствующей (1.1)-(1.3).

## 2. Космологические модели со скалярным полем

Пространственно-плоские космологические модели со скалярным полем описываются системой уравнений следующего вида:

$$H^2 = \mu\left(\frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + V(\phi) + \Lambda\right), \quad (2.1)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V'(\phi). \quad (2.2)$$

Уравнение (1.3) в этом случае является следствием первых двух. Из этой системы можно исключить параметр Хаббла  $H$ . Из первого уравнения находим:

$$H = \pm \sqrt{\mu\left(\frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + V(\phi) + \Lambda\right)}. \quad (2.3)$$

В этом соотношении мы оставим для анализа только знак  $+$  перед квадратным корнем, поскольку нас будет интересовать только расширяющиеся космологические модели с  $H > 0$ . Подставляя это соотношение во второе уравнение, получаем:

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\phi}\sqrt{\mu\left(\frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + V(\phi) + \Lambda\right)} = -V'(\phi). \quad (2.4)$$

Это уравнение теперь можно представить в виде двумерной динамической системы первого порядка:

$$\dot{\phi} = P(\phi, \xi) = \xi, \quad (2.5)$$

$$\dot{\xi} = Q(\phi, \xi) = -3\xi\sqrt{\mu\left(\xi^2/2 + V(\phi) + \Lambda\right)} - V'(\phi). \quad (2.6)$$

Особыми или неподвижными точками системы являются такие точки  $(\phi_i, \xi_i)$  на фазовой плоскости  $(\phi, \xi = \dot{\phi})$ , в которых выполнены условия:

$$P(\phi_i, \xi_i) = Q(\phi_i, \xi_i) = 0.$$

Для системы (2.5) соответствующие точки определяются решениями уравнений:

$$\xi_i = 0, \quad V'(\phi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.7)$$

Следовательно, неподвижными точками всех таких моделей являются экстремумы потенциала самодействия  $V(\phi)$ , число которых обозначено через  $N$ . Для анализа характера поведения Вселенной при асимптотическом приближении к неподвижным точкам следует вычислить значение масштабного фактора, исходя из формулы (2.3). В результате имеем:

$$H_i = \sqrt{\mu(\Lambda + V(\phi_i))}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.8)$$

Согласно общей идеологии качественного анализа, неподвижные точки могут быть притягивающими или отталкивающими в зависимости от того, приближаются или удаляются от этих точек траектории (интегральные кривые) системы при  $t \rightarrow \infty$ . Для выяснения этого обстоятельства необходимо провести анализ поведения бесконечно малых возмущений вблизи неподвижных точек.

Представим параметры модели в следующем виде:  $\phi = \phi_i + x$  и  $\xi = \xi_i + y$ , где  $x$  и  $y$  - возмущения первого порядка малости, зависящие от  $t$ , а  $\phi_i$  и  $\xi_i$  - значения функций системы в неподвижных точках. Согласно общей теории возмущений, уравнения для  $x$  и  $y$  будут иметь вид:

$$\dot{x} = \frac{\partial P(\phi_i, \xi_i)}{\partial \phi_i} x + \frac{\partial P(\phi_i, \xi_i)}{\partial \xi_i} y, \quad (2.9)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial Q(\phi_i, \xi_i)}{\partial \phi_i} x + \frac{\partial Q(\phi_i, \xi_i)}{\partial \xi_i} y. \quad (2.10)$$

Решение системы ищется в виде:  $x = Ae^{\lambda t}$ ,  $y = Be^{\lambda t}$ , где характеристические числа  $\lambda$  находятся из решения алгебраического уравнения:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial P(\phi_i, \xi_i)}{\partial \phi_i} - \lambda & \frac{\partial P(\phi_i, \xi_i)}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial Q(\phi_i, \xi_i)}{\partial \phi_i} & \frac{\partial Q(\phi_i, \xi_i)}{\partial \xi_i} - \lambda \end{pmatrix} = 0. \quad (2.11)$$

Для рассматриваемого случая:

$$\frac{\partial P(\phi_i, \xi_i)}{\partial \phi_i} = 0, \quad \frac{\partial P(\phi_i, \xi_i)}{\partial \xi_i} = 1, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial Q(\phi_i, \xi_i)}{\partial \phi_i} = -V''(\phi), \quad \frac{\partial Q(\phi_i, \xi_i)}{\partial \xi_i} = -3\sqrt{\mu(V(\phi) + \Lambda)}. \quad (2.13)$$

Отсюда уравнение для характеристических чисел будет иметь такой вид:

$$\lambda^2 + 3\lambda\sqrt{\mu(V(\phi_i) + \Lambda)} + V''(\phi_i) = 0.$$

Таким образом:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{3}{2} \left[ \sqrt{\mu(V(\phi_i) + \Lambda)} \pm \sqrt{\mu(V(\phi_i) + \Lambda) - 4V''(\phi_i)/9} \right] = -\frac{3}{2} H_i \pm \sqrt{9H_i/4 - V''(\phi_i)}. \quad (2.14)$$

Устойчивость неподвижной точки определяется знаками вещественной части всех характеристических чисел системы в этой точке. Устойчивыми или притягивающими точками будут те, для которых вещественные части  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  будут отрицательными. Для этого достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:

$$\begin{aligned} (I) \quad & \mu(V(\phi_i) + \Lambda) > (4/9)V''(\phi) > 0, \\ (II) \quad & 0 \leq \mu(V(\phi_i) + \Lambda) < (4/9)V''(\phi). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Отметим то обстоятельство, что при  $\Lambda = 0$  и  $V(\phi_i) = 0$ , особая точка представляет собой центр. Учитывая то, что величину  $V(\phi_i) + \Lambda$  можно рассматривать как эффективную космологическую постоянную, можно утверждать, что признаком равенства нулю эффективной космологической постоянной является асимптотическая осцилляция поля вблизи  $\phi_i$  с ненулевой амплитудой, по крайней мере в нулевом порядке теории возмущений. Частота этих осцилляций определяется величиной  $\omega_0 = \sqrt{|9H_i/4 - V''(\phi_i)|}$ . Эти осцилляции должны прослеживаться не только в значениях самого поля, но и в величине параметра Хаббла. Таким образом, обнаружение осцилляций величины параметра Хаббла на фоне фридмановской или де-Ситтеровской стадий эволюции может быть признаком выполнения неравенства (II), то есть  $0 \leq \mu(V(\phi_i) + \Lambda) < (4/9)V''(\phi)$ . Период осцилляций и их амплитуда в параметре Хаббла могут быть достаточно большими. В силу этого, есть вероятность того, что локальное увеличение параметра Хаббла может в эксперименте восприниматься как ускоренное расширение Вселенной при выполнении условия (II).

### 3. Потенциал Хиггса

Потенциал Хиггса определяется соотношением:

$$V(\phi) = \alpha\phi^4 - \beta\phi^2 + c, \quad (3.1)$$

где  $\alpha, \beta, c$  - положительные постоянные. Этот потенциал имеет три экстремума:

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = \sqrt{\beta/(2\alpha)}, \quad \phi_3 = -\sqrt{\beta/(2\alpha)}.$$

Число  $c$  обычно определяется из условия, что в минимумах  $\phi_{2,3}$  значение потенциала равно нулю:

$$c = \beta^2/(4\alpha),$$

Условие  $V(\phi) \geq 0$  необходимо для выполнения принципа энергодоминантности при всех  $\phi$  в процессе эволюции. В экстремумах находим значения самого потенциала и второй производной:

$$\begin{aligned} V(\phi_1) &= \beta^2/(4\alpha), \quad V''(\phi_1) = -2\beta, \quad H_1 = \sqrt{\mu\left(\frac{\beta^2}{4\alpha} + \Lambda\right)}, \\ V(\phi_{2,3}) &= 0, \quad V''(\phi_{2,3}) = 4\beta, \quad H_{2,3} = \sqrt{\mu\Lambda}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В результате:

$$\begin{aligned} (i=1) \quad \lambda_{\pm} &= -\frac{3}{2} \left[ \sqrt{\mu\left(\frac{\beta^2}{4\alpha} + \Lambda\right)} \pm \sqrt{\mu\left(\frac{\beta^2}{4\alpha} + \Lambda\right) + 8\beta/9} \right], \\ (i=2,3) \quad \lambda_{\pm} &= -\frac{3}{2} \left[ \sqrt{\mu\Lambda} \pm \sqrt{\mu\Lambda - 8\beta/3} \right]. \end{aligned}$$

Из последних соотношений следует, что точка  $\phi_1 = 0$  является неустойчивой при  $t \rightarrow \infty$ , поскольку одно из характеристических чисел положительно при всех допустимых параметрах системы и потенциала, то есть при  $\Lambda \geq 0$  и  $\alpha > 0, \beta > 0$ . Однако эта точка является устойчивой в обратном времени, то есть при  $t \rightarrow -\infty$ . Следовательно, для данного типа потенциала выход из точки  $t = -\infty$  устойчиво происходит в виде инфляционного роста масштабного фактора, поскольку в этом случае  $H_i > 0$  вблизи этой точки.

Две другие точки устойчивы, поскольку при всех параметрах системы и потенциала вещественные их части отрицательны. В этом случае значения масштабного фактора определяются исключительно значением космологической постоянной. В результате, если космологическая постоянная ненулевая, то реализуется сценарий ускоренного расширения в форме вторичной инфляции:

$$a \sim e^{\sqrt{\mu\Lambda}t}, \quad \Omega = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

В случае нулевой космологической постоянной реализуется сценарий Фридмана:

$$a \sim t^{\nu}, \quad \Omega = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = 1, \quad H(t) \sim t^{-1} \rightarrow H_i = 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Тип устойчивых точек зависит от соотношения значений космологической постоянной и параметра потенциала  $b$ . Именно, в случае  $\Lambda = 0$  обе точки представляют собой центр:

$$\lambda_{\pm} = \lambda_{\pm} = \mp i \frac{3}{2} \sqrt{8\beta/3}. \quad (3.3)$$

В случае  $0 < \Lambda \leq 8\beta/3$  - фокус:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{3}{2} \left[ \sqrt{\mu\Lambda} \pm i \sqrt{|\mu\Lambda - 8\beta/3|} \right], \quad (3.4)$$

и в случае  $\Lambda \geq 8\beta/3$  - узел (оба корня - вещественные и отрицательные). Таким образом, возможность наблюдать осцилляции существует в случаях (3.3) и (3.4). Как уже отмечалось, наличие осцилляций в параметре Хаббла может восприниматься как ускоренный режим эволюции.

#### 4. Модель со скалярным полем и жидкостью

В качестве следующего примера рассмотрим модель с жидкостью. Вычислим из первого уравнения (1.1) плотность энергии жидкости:

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu} H^2 - \left( \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 + V(\phi) + \Lambda \right), \quad (4.1)$$

и подставим в третье уравнение, полагая при этом  $p = \gamma\varepsilon$ . В результате, система уравнений после введения переменной  $\xi = \phi$ , принимает такой вид:

$$\dot{\phi} = P(\phi, \xi, \zeta) = \xi, \quad (4.2)$$

$$\dot{H} = R(\phi, \xi, \zeta) = -\frac{3(\gamma+1)}{2} H^2 + \frac{\mu(\gamma-1)}{2} \xi^2 + \mu \frac{3(\gamma+1)}{2} (V(\phi) + \Lambda), \quad (4.3)$$

$$\dot{\xi} = Q(\phi, \xi, \zeta) = -3\xi H - V'(\phi). \quad (4.4)$$

Неподвижные точки этой модели при  $\gamma \neq -1$  вычисляются из условий:

$$\xi_i = 0, \quad H_i = \sqrt{\mu(\Lambda + V(\phi_i))}, \quad V'(\phi_i) = 0. \quad (4.5)$$

Как и в модели с одним скалярным полем, неподвижные точки соответствуют экстремумам потенциала  $\phi_i$ , а значения масштабного фактора в неподвижных точках вычисляются по тем же формулам (2.8). Из соотношения для  $H_i$  следует, что вещественные значения  $H_i$  в стационарных точках будут существовать при условии неотрицательности подкоренного выражения для  $H_i$ , то есть:

$$0 \leq \Lambda + V(\phi_i).$$

В силу требований принципа энергодоминантности [1] это условие выполняется всегда. Отметим также, что неподвижные точки (4.6) при  $H_i > 0$  соответствуют экспоненциальному расширению Вселенной, то есть асимптотическому ускоренному расширению:

$$a = a_0 e^{H_i t}, \quad \Omega = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

В случае  $H_i = 0$ , что возможно при одновременном выполнении условий  $\Lambda = 0$  и  $V(\phi_i) = 0$ , система будет переходить асимптотически к фридмановскому сценарию:

$$a(t) \sim t^\nu \rightarrow H(t) \sim t^{-1} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что для того, чтобы реализовался сценарий с ускоренным расширением Вселенной в асимптотике при  $t \rightarrow \infty$  достаточно, чтобы выполнялись условия  $\Lambda + V(\phi_i) > 0$  и  $\gamma > -1$ .

Особыми случаями являются модели, соответствующие условию  $\gamma = -1$ . В этом случае особая точка определяется двумя соотношениями:

$$\xi_i = 0, \quad V'(\phi_i) = 0, \quad (4.6)$$

а значение  $H_i$  не определено. В силу этого в асимптотике эти модели допускают все возможные типы расширения Вселенной.

Используя (4.6), можем вычислить в неподвижных точках значения параметров жидкости:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\mu} H_i^2 - V(\phi_i) - \Lambda = 0. \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что при условии выполнения принципа энергодоминантности и расширения Вселенной в асимптотике  $\varepsilon_i = 0$ , то есть эволюция Вселенной стремится к состоянию с нулевой плотностью жидкости.

Вычисляем производные в неподвижных точках:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \phi_i} &= 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \xi_i} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial H_i} = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial \phi_i} &= -V''(\phi_i), \quad \frac{\partial Q}{\partial \xi_i} = -3H_i, \quad \frac{\partial Q}{\partial H_i} = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial \phi_i} &= 0, \quad \frac{\partial R}{\partial \xi_i} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial H_i} = -3(\gamma+1)H_i. \end{aligned}$$

Уравнение для характеристических чисел в результате будет иметь такой вид:

$$\left(\lambda + 2(\gamma + 1)H_i\right)\left(\lambda^2 + 3\lambda H_i + V''(\phi_i)\right) = 0. \quad (4.8)$$

Эта система имеет три корня:

$$\lambda_0 = -3(\gamma + 1)H_i, \quad \lambda_{\pm} = -\frac{3H_i}{2} \pm \sqrt{\frac{9H_i^2}{4} - V''(\phi_i)}. \quad (4.9)$$

Сравнивая эти соотношения с (2.14) можно видеть, что последние два характеристических числа в точности совпадают с характеристическими числами линеаризованной модели, только со скалярным полем. Отличием является только наличие в системе дополнительного третьего не положительного характеристического числа  $\lambda_0$  при  $\gamma \geq -1$ . Следовательно, все основные выводы относительно асимптотического поведения космологической модели с жидкостью и скалярным полем в случае  $\gamma \geq -1$  остаются теми же, что и в случае наличия только скалярного поля. В случае же  $\gamma \leq -1$  все особые точки оказываются неустойчивыми.

## 5. Численный анализ моделей

### 5.1. Массивное скалярное поле

Для численного анализа сначала выберем потенциал в форме массивного скалярного поля:

$$V = m^2\phi^2, \quad (5.1)$$

где  $m$  - параметр размерности массы кванта поля. Вводя безразмерные переменные:

$$x = \phi/\phi_0, \quad y = \xi/\xi_0, \quad z = H/H_0, \quad \tau = t/T_0, \quad (5.2)$$

где масштабы выбраны следующим образом:

$$\xi_0 = m\mu^{-1/2}, \quad \phi_0 = \mu^{-1/2}, \quad T_0 = m^{-1}, \quad H_0 = m,$$

система уравнений (4.2) приводится к безразмерному виду:

$$\dot{x} = y, \quad (5.3)$$

$$\dot{z} = -\frac{3(\gamma + 1)}{2}z^2 + \frac{(\gamma - 1)}{2}y^2 + \frac{3(\gamma + 1)}{2}\left(x^2 + \bar{\Lambda}\right), \quad (5.4)$$

$$\dot{y} = Q(\phi, \xi, \zeta) = -3yz - 2x. \quad (5.5)$$

Здесь:

$$\bar{\Lambda} = \Lambda\mu/m^2.$$

Как видно, единственным существенным параметром обезразмеренной системы с массивным скалярным полем является величина космологической постоянной.

На рисунке 1 представлены типичные графики эволюции нормированного поля  $x(t) = \phi(t)\sqrt{\mu}$  и нормированного параметра Хаббла  $z(t) = H(t)/m$  для массивного скалярного поля на интервале времени  $t \in [0, 100m^{-1}]$ . Для численного анализа выбрано значение параметра баротропы, равное его значению для изотропного электромагнитного излучения, то есть  $\gamma = 1/3$ . Как показывает анализ, изменение  $\gamma$  в пределах  $0 \leq \gamma < 1$  меняет динамику модели незначительно.

Начальные условия выбраны такими  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = -0.1$ ,  $z(0) = 1$ , а значение нормированной космологической постоянной принято равным  $\bar{\Lambda} = 0.0001$ . В соответствии с этим, значение  $H_0$  в стационарной точке должно быть равно  $z_0 = \sqrt{\bar{\Lambda}}$ , поскольку значение потенциала самодействия в особой точке равно нулю.

На рисунке 2 представлены фазовые портреты системы на двух плоскостях  $x - y$  и  $x - z$ , то есть нормированные фазовые портреты  $\phi - \dot{\phi}$  и  $\phi - H$ . Для иллюстрации того, что значения параметров модели стремятся к значениям в особой точке, на рисунке 3 приведены отдельно области графиков вблизи особых точек. Из рисунка 3b видно, что масштабный фактор стремится

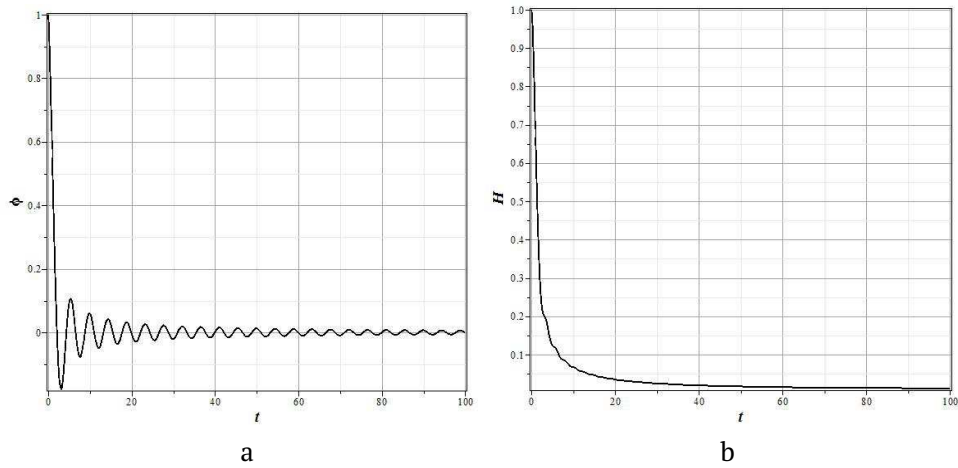


Рис. 1. Графики эволюции переменной  $x(t)$  (а) и  $z(t)$  (б) со временем для потенциала массивного скалярного поля и  $\gamma = 1/3$ .

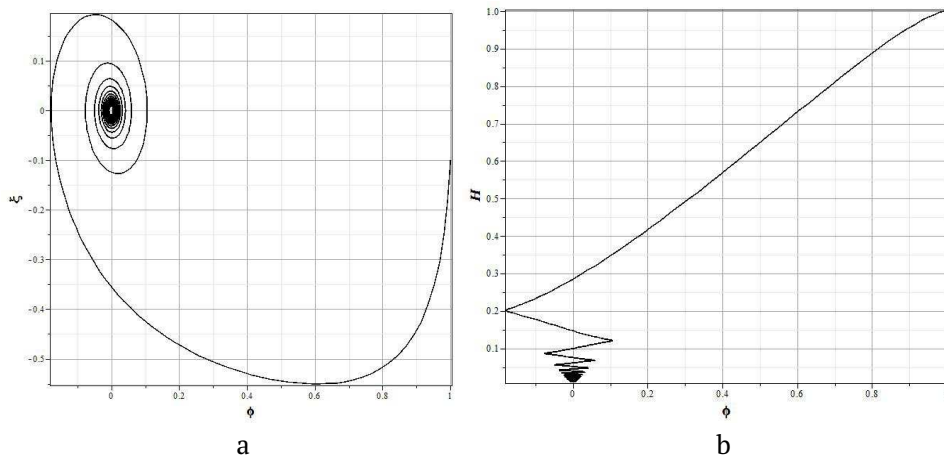


Рис. 2. Фазовые портреты  $x - y$  (а) и  $x - z$  (б) для потенциала массивного скалярного поля и  $\gamma = 1/3$ .

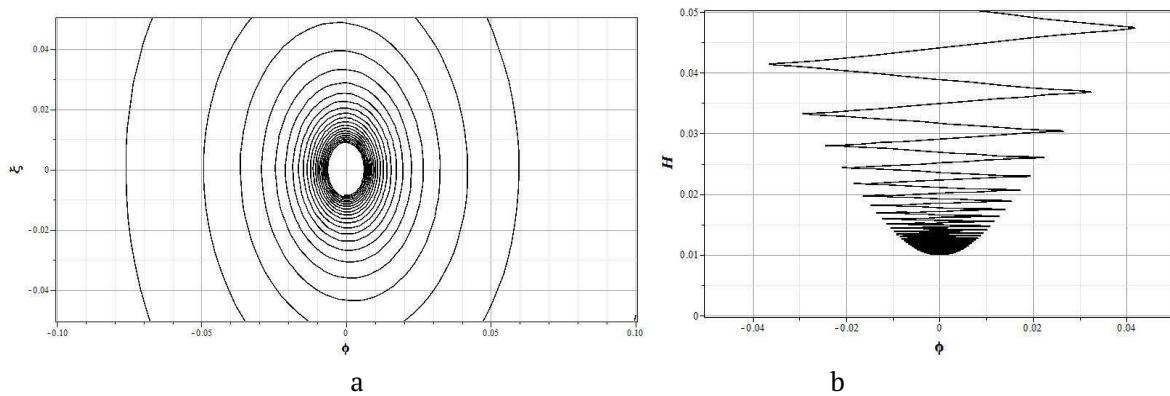


Рис. 3. Области фазовых портретов  $x - y$  (а) и  $x - z$  (б) вблизи особых точек для потенциала массивного скалярного поля и  $\gamma = 1/3$

к значению  $z_0 = \sqrt{\Lambda} = 0.01$ . Рисунок 3а демонстрирует асимптотическое стремление не к фокусу в точке  $(0, 0)$ , как это следует из анализа в первом порядке теории возмущений, а скорее к

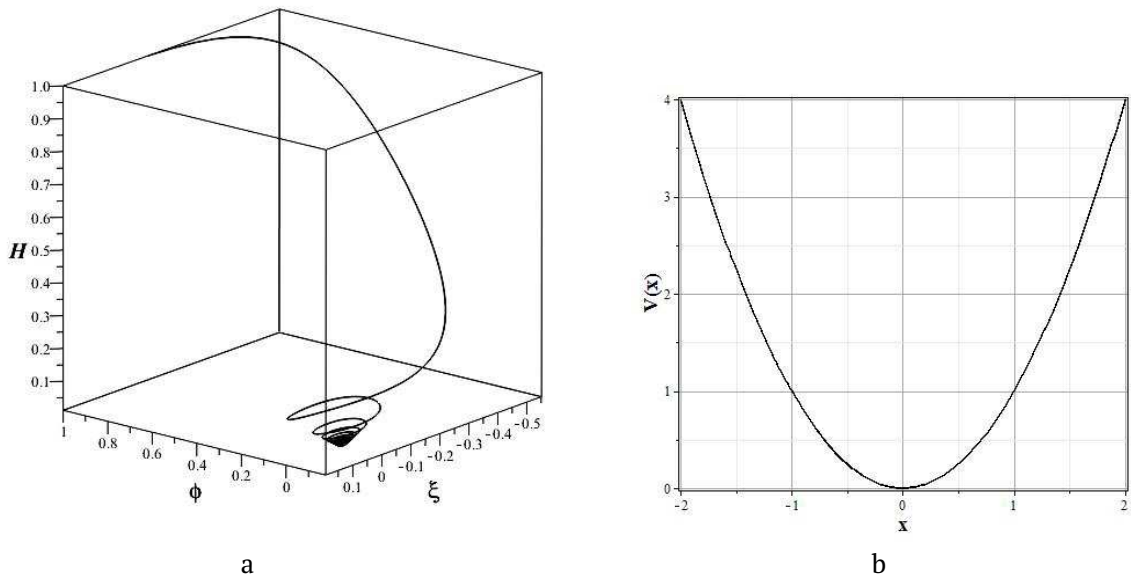


Рис. 4. Фазовый портрет  $x-y-z$  и потенциал самодействия массивного скалярного поля ( $\gamma = 1/3$ )

предельному циклу. Последнее можно проверить, лишь переходя к анализу во втором порядке теории возмущений.

Для иллюстрации общего поведения рассматриваемой системы на рисунке 4 приведен фазовый портрет в 3D при тех же начальных условиях.

### 5.2. Потенциал Хиггса

В безразмерном виде потенциал Хиггса (3.1) будет иметь вид:

$$\bar{V}(x) = vx^4 - x^2 + 1/(4v).$$

Здесь параметр массы  $m$ , фигурирующий в модели со скалярным полем, выбирается следующим образом:

$$m = \sqrt{\beta}.$$

В этом случае:  $v = \alpha$  и система уравнений примет следующий вид:

$$\dot{x} = y, \tag{5.6}$$

$$\dot{z} = -\frac{3(\gamma+1)}{2}z^2 + \frac{(\gamma-1)}{2}y^2 + \frac{3(\gamma+1)}{2}\left(vx^4 - x^2 + \frac{1}{4v} + \bar{\Lambda}\right), \tag{5.7}$$

$$\dot{y} = Q(\phi, \xi, \zeta) = -3yz - 4vx^3 + 2x. \tag{5.8}$$

#### 5.2.1. Параметр баротропы $\gamma = 1/3$

На рисунках 5 – 8 представлены графики, аналогичные графикам для случая массивного скалярного поля. Представленные численные решения соответствуют тем же начальным условиям  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = -0.1$ ,  $z(0) = 1$  и тому же выбору параметров системы с одним дополнением. Параметр  $v$  выбран равным 1. Соответствующий график потенциала самодействия представлен на рисунке 11. Можно видеть, что общее поведение моделей вблизи особых точек отличаются не значительно друг от друга.



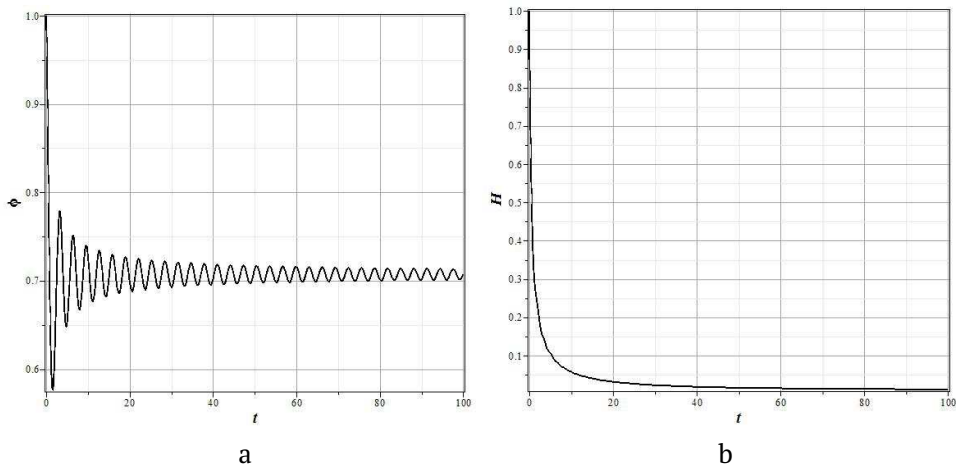


Рис. 5. Графики эволюции переменных  $x(t)$  (а) и  $z(t)$  (б) для потенциала Хиггса и  $\gamma = 1/3$ .

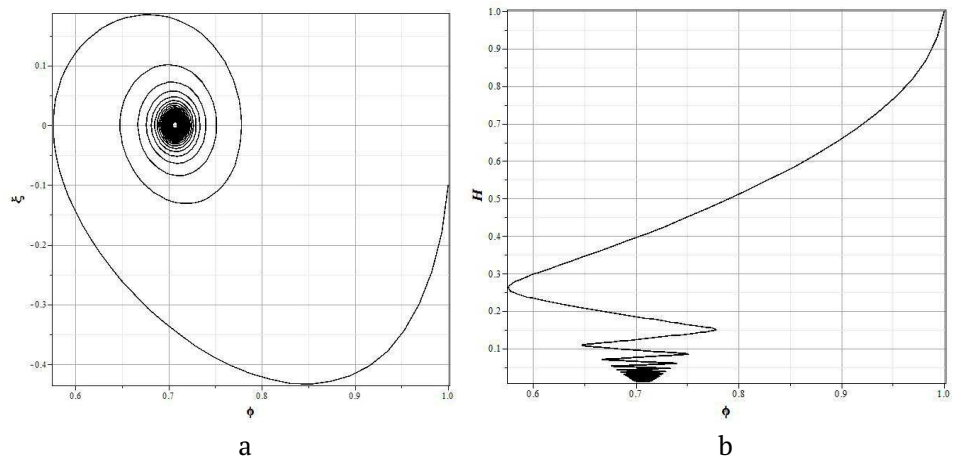


Рис. 6. Фазовые портреты  $x - y$  (а) и  $x - z$  (б) для потенциала Хиггса и  $\gamma = 1/3$ .

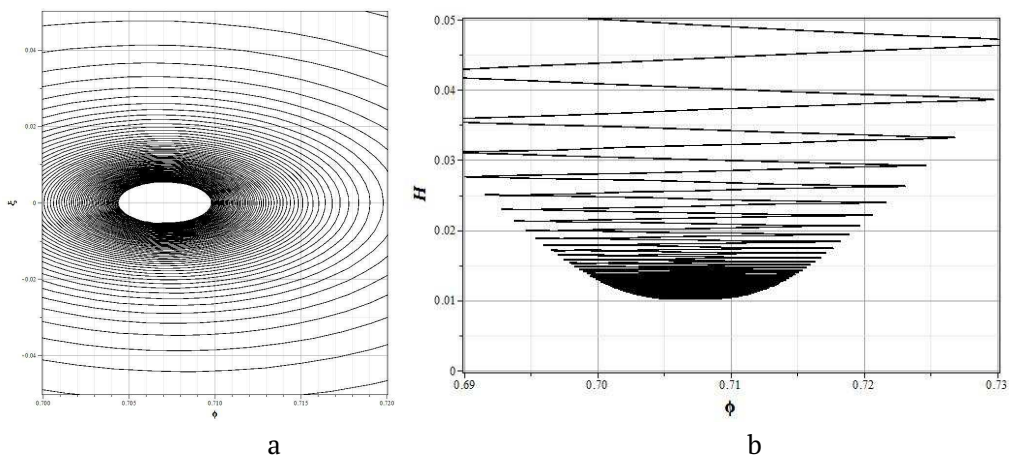


Рис. 7. Области фазовых портретов  $x - y$  (а) и  $x - z$  (б) вблизи особых точек для потенциала Хиггса и  $\gamma = 1/3$

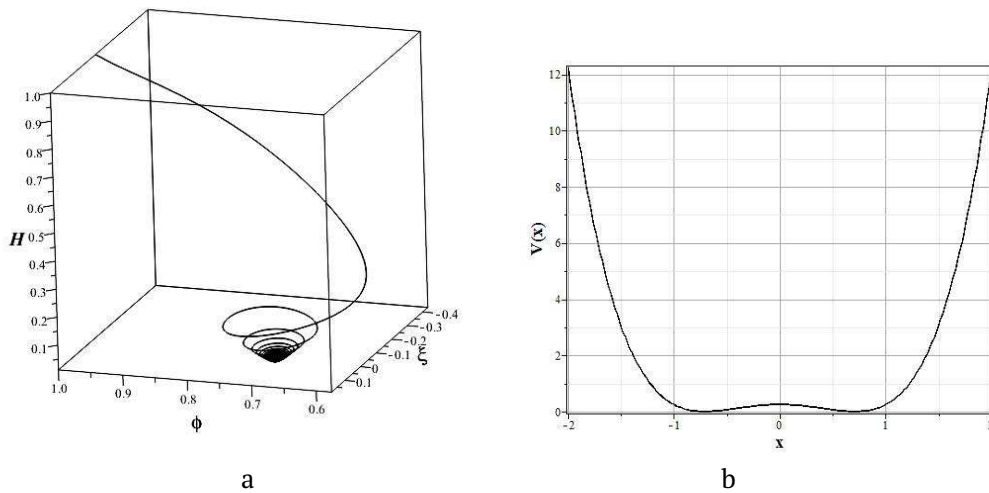


Рис. 8. Фазовый портрет  $x - y - z$  (a) и потенциал самодействия Хиггса (b) ( $\gamma = 1/3$ )

### 5.2.2. Параметр баротропы $\gamma = -1$

На рисунках 9 – 11 представлены графики для случая потенциала Хиггса, но для особого значения параметра баротропы, равного  $\gamma = -1$ . Представленные численные решения соответствуют тем же начальным условиям  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = -0.1$ ,  $z(0) = 1$  и тому же выбору параметров системы, что и в предыдущем случае. Общее поведение модели вблизи особых точек теперь отличается существенно. Значение масштабного фактора в асимптотике теперь отличается существенно от значения, которое бы он имел при  $\gamma \neq -1$ . Особая точка представляет теперь не фокус или, возможно, предельный цикл, как это можно видеть в предыдущих моделях, а узел.

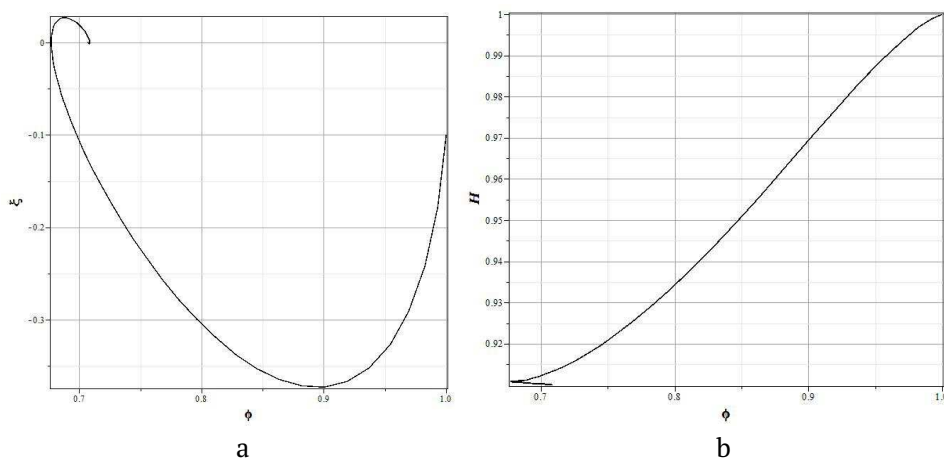


Рис. 9. Фазовые портреты  $x - y$  (a) и  $x - z$  (b) для потенциала Хиггса и  $\gamma = -1$ .

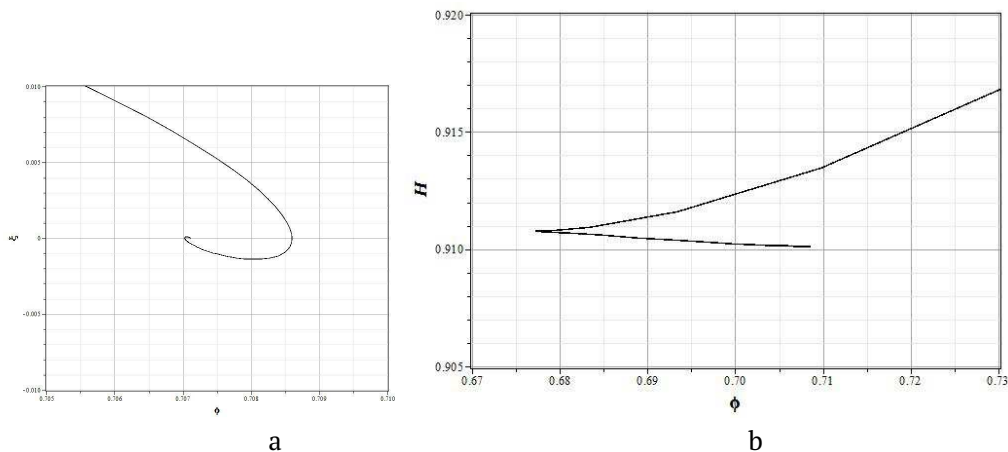


Рис. 10. Области фазовых портретов  $x - y$  (а) и  $x - z$  (б) вблизи особых точек для потенциала Хиггса и  $\gamma = -1$

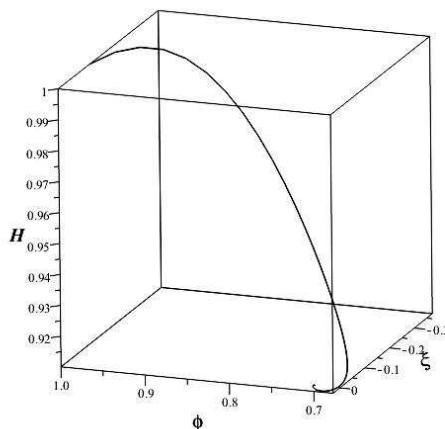


Рис. 11. Области фазовых портретов  $x - y - z$  для потенциала Хиггса и  $\gamma = -1$

**Заключение**

Проведенный качественный анализ динамики космологических моделей с потенциалом самодействия скалярного поля общего вида и жидкостью с баротропным уравнением состояния показывает, что общее поведение всех таких моделей вблизи устойчивых особых точек незначительно отличается от поведения системы с одним скалярным массивным полем [3–5]. Численный анализ подтверждает этот общий вывод. Существенным образом динамика системы отличается лишь в случае параметра баротропы  $\gamma = -1$ . В процессе анализа численного решения привлекает внимание тот факт, что, по крайней мере, для случаев  $\gamma \geq 0$ , на фазовой плоскости  $\phi - \dot{\phi}$  система не стремится к стационарной точке, что должно быть следствием выводов, полученных в первом порядке теории возмущений. При  $\Lambda \neq 0$  точки должны быть фокусами. Однако, как показывает численный анализ, траектории системы выходят, по всей видимости, на предельный цикл. Этот важный вывод должен быть проверен с привлечением анализа во втором порядке теории возмущений или другими способами. Как было отмечено, наличие предельных осцилляций масштабного фактора в рассматриваемых моделях, особенно в случае выхода системы на предельный цикл, может восприниматься в эксперименте как ускоренное расширение на определенных участках эволюции. Это может привести к новой интерпретации наблюдаемого современного ускоренного расширения Вселенной, как участка осцилляции масштабного фактора с ростом параметра Хаббла  $H(t)$ .

Автор искренне благодарит Игнатьева Ю.Г. за полезное обсуждение темы данной работы.

Работа выполнена при поддержке Министерства Образования и Науки РФ (в рамках Государственного задания и проекта № 14.Z50.31.0015) и за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бронников К.А., Рубин С.Г. Лекции по гравитации и космологии. Учебное пособие. М.: Изд. МИФИ, 2008. 460 с.
2. Zhuravlev V.M., Podymova T.V., Pereskokov E.A. Cosmological Models with a Specified Trajectory on the Energy Phase Plane // *Gravitation and Cosmology*. 2011. Vol. 17. № 2. P. 101–109.
3. Долгов А.Д., Зельдович Я.Б., Сажин М.В. Космология ранней Вселенной. М.: Изд. МГУ, 1988. 199 с.
4. Игнатъев Ю.Г. Классическая космология и темная энергия. Казань: Изд-во Казанского университета, 2016. 248 с.
5. Игнатъев Ю.Г. Стандартная космологическая модель: математический, качественный и численный анализ // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2016. № 3. С. 17–36.
6. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Серия “Справочная математическая библиотека”. Вып. 11. М.: Наука, 1989. 489 с.

Поступила в редакцию 15.12.2016

Журавлев Виктор Михайлович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической физики, НИТИ им. С.П. Капицы, Ульяновский государственный университет, 432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Л.Толстого, 42; Институт математики и механики им. Н.И.Лобачевского, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская 18, 420008 Казань, Россия. E-mail: zhvictorm@gmail.com

**V. M. Zhuravlev**

#### **Qualitative analysis of cosmological models with scalar fields**

*Keywords:* cosmological model with a scalar field and matter, qualitative analysis, asymptotic behavior, the cosmological constant.

PACS: 02.40.-k, 03.65.-w, 04.50.Kd, 11.90.+t

The work is carried out a qualitative analysis of cosmological models with scalar field and a substance having barotropic equation of state. It is assumed that the self-action potential of the scalar field is an arbitrary function of the field. The space-time metric is assumed to spatially flat space Friedmann-Robertson-Walker. The model equations are presented in the form of the equations of the first order dynamic system. We calculate the specific terms of a dynamical system and their properties in the first-order perturbation theory. Analyzes the changes in the properties of models, depending on the presence or absence of the cosmological constant.

#### REFERENCES

1. Bronnikov K.A., Rubin S.G. *Lekcii po gravitacii i kosmologii* (Lectures on Gravitation and Cosmology), Moscow: Izd. MIFI, 2008, 460 p.
2. Zhuravlev V.M., Podymova T.V., Pereskokov E.A. Cosmological Models with a Specified Trajectory on the Energy Phase Plane, *Gravitation and Cosmology*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 101–109.
3. Dolgov A.D., Zeldovich Ya.B., Sazhin M.V. *Kosmologiya ranney Vselenny* (The cosmology of the early Universe), Moscow: Izd. Moscow State University, 1988, 199 p.
4. Ignat'ev Yu.G. *Klassicheskaya kosmologiya i temnaya ehnergiya* (Classical cosmology and dark matter), Kazan: Izd. Kazan University, 2016, 248 p.
5. Ignat'ev Yu.G. Standard cosmological model: mathmatical, qualitatively and numerical analysis, *Space, time and fundamental interaction*, 2016, no. 3, pp. 17–36.

6. Bautin N.N., Leontovich E.A. *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti. Vyp. 11* (Methods and techniques of the qualitative study of dynamical systems on the plane. Vol. 11), Moscow: Nauka, 1989, 489 p.

Received 15.12.2016

Zhuravlev Victor Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Theoretical Physics department, Ulyanovsk State University, ul. Leo Tolstoy, 42, Ulyanovsk, 432017, Russia; N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlevskaya, 18, 420008 Kazan, Russia.  
E-mail: zhvictorm@gmail.com