

# Лекция. Кинетические и динамические модели эволюции численности популяций и социальных систем

## 1 Первое уравнение биологической эволюции

Математика и натурфилософия с начала своего существования пытались найти решения задач об устройстве мироздания. Но это касалось в основном неживой материи. Например, **Архимед** пытался вычислить число песчинок, из которых состоит мир. **Гиппарх** пытался сосчитать звезды на небе. Но в конце концов ученые обратили свой взор и на живую материю. В 1202 году Леонардо Пизанский по прозвищу **Фибоначчи** опубликовал работу "Книга Абака", в которой описал установленный им закон размножения кроликов в идеальных условиях. Последовательность числа популяции кроликов в каждый месяц ее существования, начиная от первого кролика, теперь называется последовательностью **чисел Фибоначчи**. Первые числа этой последовательности имеют такой вид:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Удивительным было то, что подмеченная Фибоначчи закономерность в идеальных условиях содержания кроликов, повторялась неукоснительно. Математически последовательность чисел Фибоначчи можно записать в виде рекуррентного соотношения следующего вида:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n = 1, 2, \dots$$

- при условии, что начальными значениями этой последовательности являются  $F_0 = 0, F_1 = 1$ . Это было первой **математической закономерностью, подмеченной в живой природе**. Позже, изучая свойства последовательности чисел Фибоначчи, математики открыли некоторые другие свойства этой закономерности, которые отражаются в форме живых организмов. Например, можно составить последовательность квадратов с длиной стороны, равной числам Фибоначчи, и расположить их на плоскости в виде спирали (рис. 1). если теперь провести дуги, как это показано на рис. 1, то образуется спираль, которую называют **спиралью Фибоначчи**. Оказывается, такая спираль почти точно совпадает со спиралями семян некоторых растений (рис. 2). Таким образом, впервые ученым предоставилась возможность применить **математические модели для описания свойств живых организмов**.

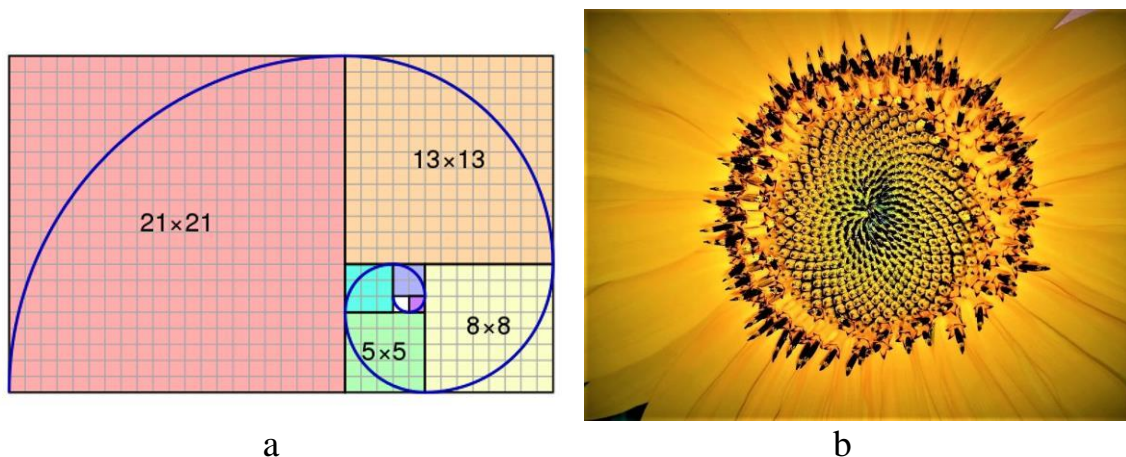


Рис. 1. Спираль Фибоначчи:

а) математическая модель, б) расположение семян подсолнуха

Следующий важный шаг был сделан только в XIX веке, когда ученые попытались прогнозировать **рост народонаселения** отдельных государств и сделать из этих прогнозов выводы, которые помогли бы дать полезную информацию для тех, кто управляет государством. Одной из первых в цикле таких работ была работа **Томаса Мальтуса** (1766—1834), который попытался описать процесс роста народонаселения в стабильных условиях жизни государства. Основной его вывод сводился к тому, что, если человеческая популяция находится в стабильных условиях, без природных несчастий, болезней и войн, то **численность** такой популяции **растет по законам геометрической прогрессии**. Отсюда можно сделать вывод, что за очень короткий промежуток времени численность народонаселения становится настолько большой, что пищи перестает хватать, приводит к болезням и войнам. Мальтус делает вывод о том, что **войны и несчастья являются благом для государства, поскольку позволяют удерживать рост народонаселения**. Такой подход сейчас носит название **мальтузианства**.

## 2 Модель Мальтуса

Хотя Мальтус и не выражал свои идеи в форме дифференциальных уравнений, тем не менее, сейчас можно считать, что **теория Мальтуса** является первой **кинетической моделью роста народонаселения**.

Эту модель можно описать следующим образом. Обозначим через  $N(t)$  количество индивидов в обществе к моменту времени  $t$ . Тогда, согласно идеям Мальтуса, прирост народонаселения, при отсутствии мешающих факторов и миграции, за небольшой промежуток времени  $\Delta t$  можно представить так:

$$\Delta N = \alpha N(t) \Delta t, \quad (1)$$

где  $\alpha$  - некоторый постоянный коэффициент, характерный для данного общества, называемый рождаемостью или относительной скоростью прироста населения. Переходя к бесконечно малым значениям  $\Delta t$  и  $\Delta N$ , можем превратить это уравнение в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N. \quad (2)$$

Решением этого уравнения является **экспонента**:

$$N(t) = N_0 e^{\alpha t}, \quad (3)$$

где  $N_0$  - количество индивидов в некоторый условный выбранный начальный момент  $t = 0$ . Поскольку  $\alpha > 0$ , то можно заметить, что народонаселение растет **экспоненциально**, или в терминах дискретных отрезков времени - **в геометрической прогрессии**. Такая модель может рассматриваться как самый первый вариант демографических моделей, который может реализоваться лишь на самых ранних этапах эволюции популяции. Такой рост наблюдается на первых этапах роста простейших биологических организмов, например, бактерий и других одноклеточных организмов. В реальности, такой рост обычно быстро заканчивается по разным причинам, в частности, за счет миграции из ареала обитания, внешних неблагоприятных факторов, болезней и т.п. Однако всегда есть фактор, присутствующий в ареале обитания всегда - это **ограниченное количество пищевых ресурсов**, которые необходимы для размножения популяции.

### 3 Модель Ферхюльста

Фактор ограниченного количества ресурсов в ареале обитания был отмечен в самом начале XIX века после работ Мальтуса. Первой такой моделью стала модель бельгийского математика **Ферхюльста** (1804-1849). Ферхюльст предположил, что **на рост численности народонаселения влияет ограниченность ресурсов**. Эта модель в терминах дифференциалов может быть записана таким образом:

$$\Delta x = (a - bx)x\Delta\tau. \quad (4)$$

Здесь  $x$  – численность популяции, а  $\tau$  – время. При переходе к бесконечно малым приращениям это уравнение может быть записано в виде обыкновенного дифференциального уравнения, которое часто называют **логистическим**:

$$\frac{dx}{d\tau} = ax - bx^2 \quad (5)$$

Для сопоставления модельных параметров этого уравнения реальным системам удобно воспользоваться специальным подходом, который называется **обезразмериванием системы**. Идея этого подхода состоит в том, что все переменные и параметры системы можно представить в безразмерном

виде. Для этого введем характерный масштаб времени  $T$ , который определяет единицу интервала времени, на котором рассматривается динамика системы. Также введем характерный масштаб размера популяции  $N_0$ . В этом случае можно ввести безразмерные переменные  $N = x/N_0$  и  $t = \tau/T$ . В этих переменных уравнение можно записать в таком виде:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2, \quad (5)$$

где  $\alpha = aT$  – безразмерный параметр рождаемости, т.е. число рождающихся за характерный масштаб времени  $T$ , а  $\beta = bT/N_0$  – безразмерный параметр, характеризующий уменьшение рождаемости из-за роста численности популяции.

Если сравнивать уравнение (5) с уравнением (2) Мальтуса, то можно сделать вывод, что в модели Ферхюльста коэффициент рождаемости, стоящий справа в скобках, при  $\beta > 0$  монотонно убывает вместе с ростом народонаселения. Такое уменьшение можно трактовать так, что коэффициент рождаемости снижается из-за уменьшения доступного ресурса, например, пищи.

Другой вариант объяснения второго слагаемого справа в скобках в модели Ферхюльста, состоит в использовании представлений, которые применяются в физике для описания химических кинетических уравнений. Для этого лучше подходит модель не народонаселения, а **абстрактной биологической популяции**. Представим правую часть уравнения Ферхюльста в следующем виде:

$$\alpha N - \beta N^2.$$

Если отнести  $N$  к площади ареала обитания  $S$  популяции, то величина  $n = N/S$  – это вероятность найти особь в случайной точке ареала или концентрация особей. При случайном “блуждании” особей и независимости событий вероятность оказаться двум особям в одной точке ареала равна произведению концентраций, т.е.  $n^2$ . Тогда квадратичное слагаемое в правой части уравнения Ферхюльста:

$$\frac{dn}{dt} = \alpha n - bn^2, b = \beta S, \quad (6)$$

можно интерпретировать, как **торможение прироста популяции** за счет того, что особи мешают друг другу при встрече, что уменьшает прирост популяции. Такой способ трактовки квадратичного слагаемого в модели Ферхюльста носит название **эффекта тесноты**. Таким способом объяснения можно пользоваться для более широкого круга моделей, которые будут встречаться далее.

Примером работоспособности модели Ферхюльста (логистической модели) может служить ее применение для описания роста биологических популяций. На рис.2 приведены экспериментальные данные роста

численности популяции дрозофилы вместе с графиком логистической модели, построенной по этим данным. **Точками** нанесены **экспериментальные данные**, **сплошная кривая** - **логистическая модель**. **Пунктиром** нанесена **кривая экспоненциального роста** (модель Мальтуса) с таким же параметром рождаемости, что и в логистической модели. Данные взяты из презентации [1], где можно найти и другие примеры с экспериментальными данными.

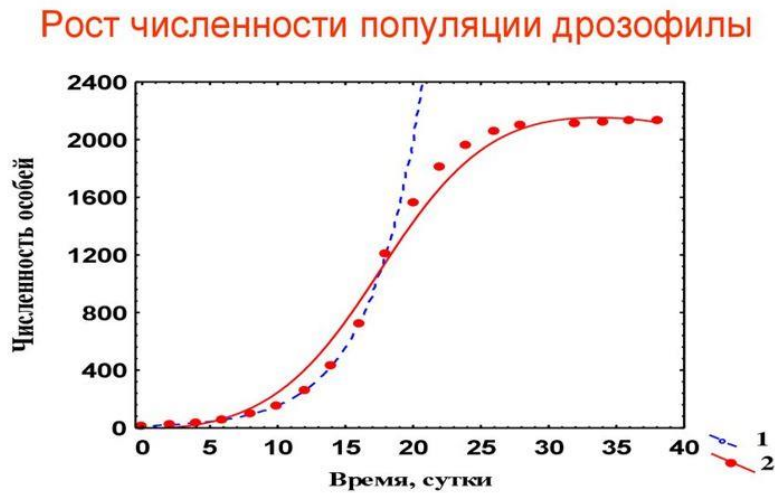


Рис. 2: Экспериментальные данные роста численности популяции дрозофилы [1]

Решение логистического уравнения (5) или (6) можно найти, разделяя переменные. Имеем:

$$\frac{dn}{n(1-rn)} = \alpha dt, r = b/\alpha.$$

Переходя к разложению дроби в правой части на простые дроби находим:

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{r}{1-rn}\right) dn = \alpha dt.$$

Интегрируя последнее уравнение находим:

$$\ln|n| - \ln|1 - rn| = \alpha t + \ln C,$$

где  $C$  - постоянная интегрирования. Отсюда находим:

$$\frac{|n|}{|1-rn|} = Ce^{\alpha t}.$$

Нас интересуют ситуации, когда  $n > 0$  (численность популяции - неотрицательное число). Тогда решение можно записать так:

$$n = \begin{cases} n = \frac{Ce^{\alpha t}}{1+rCe^{\alpha t}}, & n < 1/r; \\ n = \frac{Ce^{\alpha t}}{1-rCe^{\alpha t}}, & n > 1/r. \end{cases} \quad (7)$$

Сравнение логистической модели и модели Мальтуса для одного и того

же значения параметра рождаемости (подобные данным, приведенным на рис.2) представлены на рис. 3. Здесь значения численности популяции и время взяты в безразмерном виде. Тогда для сопоставления приведенных ниже графиков с реальными данными на рис. 2 достаточно выбрать  $N_0 = 240$ , и  $T=4$  суток.

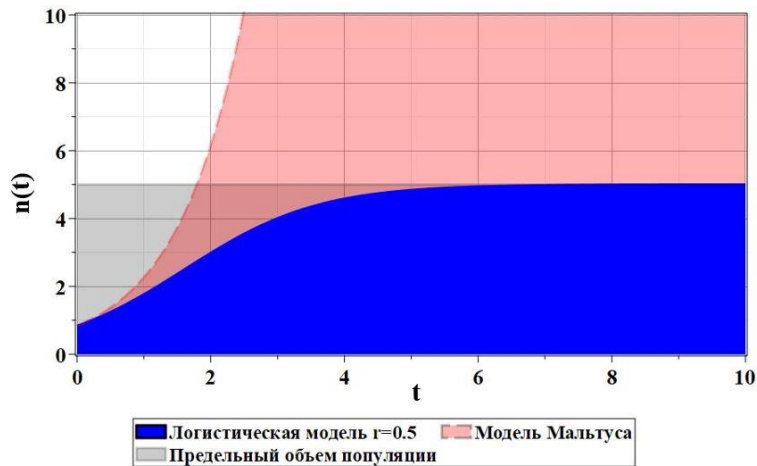


Рис. 3: Сравнительный анализ моделей Мальтуса и Ферхюльста (логистической модели) для  $r = 0.2, \alpha = 0.5, C = 1$

Графики логистической кривой представлены на рис. 4. Число  $\alpha$ , как и в модели Мальтуса, определяет “естественную” рождаемость популяции. Число  $C$  определяет начальное значение численности популяции в некоторый начальный момент времени  $t = 0$ . Число  $r$  определяет предельное значение размера популяции при  $t \rightarrow \infty$ . В этом пределе:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} = 1/r = n_0.$$

Величина  $n_0$  - предельное значение численности популяции. Число  $n_0$  называют емкостью среды. Согласно графикам на рис. 4 – рис. 7, которые построены для значений  $\alpha = 1$  и  $r = 1$ , при  $C > 1/r = n_0$  кривая численности популяции монотонно убывает и стремится к  $n_0$ . Аналогично, при  $C < 1/r = n_0$  кривая численности популяции монотонно растет и также стремится к  $n_0$ .

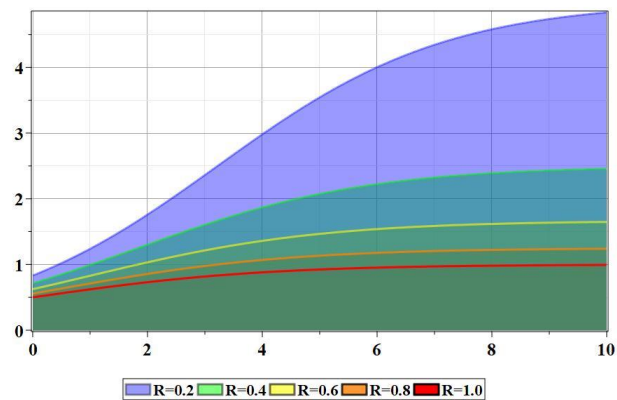


Рис. 4: Логистическая модель (7) для различных значений  $r < 1/C$  и  $C = 1$

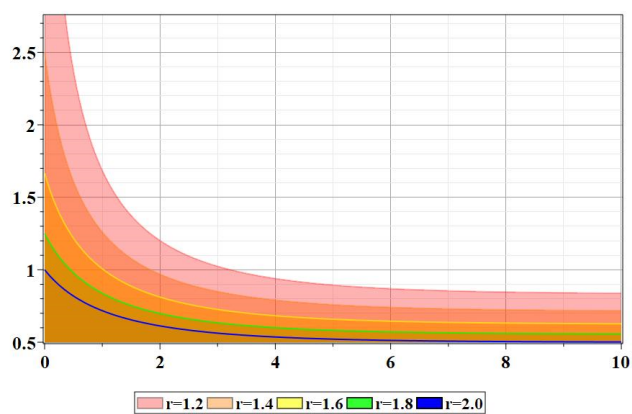


Рис. 5: Логистическая модель (7) для  $r > 1$ .  $C = 1$ .

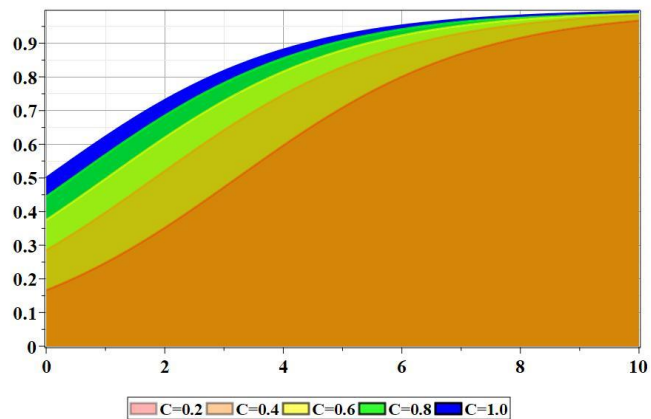


Рис. 6: Логистическая модель (7) для  $r = 0.5$  и различных значений  $C \leq 1$

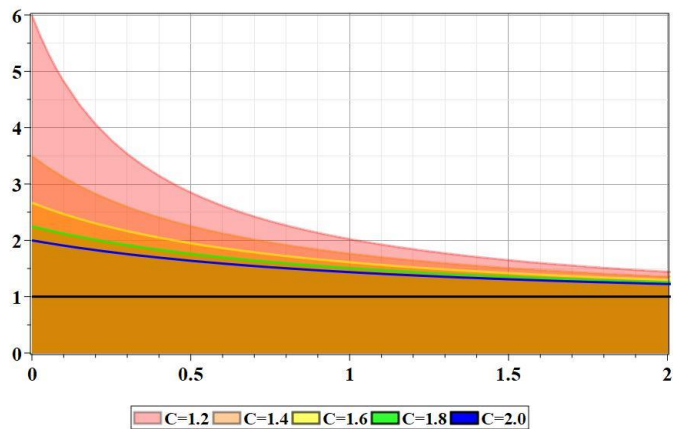


Рис. 7: Логистическая модель для  $r = 0.5$  и различных значений  $C > 1$ :

Модель Ферхюльста оказалась также очень полезной в целом ряде других направлений моделирования процессов в социальной области, экономике и даже рекламе. На рис. 8 (взято из [2]) представлена кривая роста численности участников в забастовках в Англии в 1830 году. На рис. 8 (взято из той же книги [2]) представлены кривые роста числа инфраструктурных объектов в США в XIX веке. На всех этих графиках сплошные гладкие кривые - это модельные логистические кривые с подходящими параметрами. Логистическая модель Ферхюльста дает достаточно надежную аппроксимацию реальных данных.

Причина, по которой **логистическая кривая** оказывается полезной в задачах экономики и социологии состоит в том, что она **описывает простой механизм взаимодействия, эквивалентный эффекту тесноты**.

В случае роста отдельных элементов экономической инфраструктуры ограничение роста возникает из ограничения спроса, когда все основные потребности в данном секторе экономики исчерпываются. Это наглядно демонстрируют графики на рис. 9. На начальном этапе рост элементов инфраструктуры происходит по экспоненциальному закону, что означает рост спроса пропорционально достигнутому к текущему моменту времени результату, а затем он ограничивается тем, что число новых предложений убывает, поскольку все потребности удовлетворены на данном этапе роста экономики. Для экономических моделей нелинейное слагаемое в модели Ферхюльста в виде квадратичного слагаемого можно объяснить действиями конкурентов. Однако, поскольку число одновременно действующих конкурентов может быть больше двух, то нелинейное слагаемое может иметь более высокую степень, чем 2.

В случае роста участников протестов (рис. 8) ограничение роста связано с ограниченностью общей численности недовольных. Сначала в протесте



участвуют лишь самые активные, затем к ним присоединяются все, кто узнал о протесте и считают, что участие необходимо. Однако количество участников протеста ограничено размерами соответствующей социальной группы. В результате объем социальной группы исчерпывается и приток новых участников убывает, а затем и исчезает. В современных условиях, когда информация распространяется через интернет или с помощью другой какой-либо социальной сети, нелинейное слагаемое в модели Ферхюльста, ограничивающее рост, может иметь и другой вид, например, экспоненциальный, а не квадратичный.

По аналогичной схеме развивается ситуация с распространением рекламы. Эффективность рекламной компании на начальном этапе связана с тем, что информация о рекламируемом продукте передается от одного человека другому, что вполне соответствует модели Ферхюльста с квадратичным слагаемым. Однако передача информации через интернет создает условия очень быстрого распространения информации и, как следствие, быстрого ограничения роста эффективности рекламы.

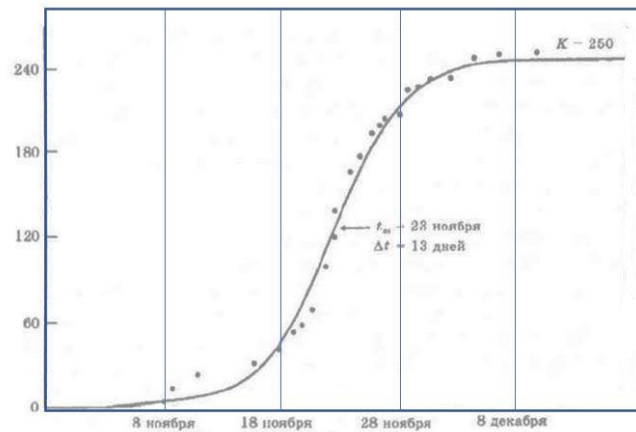


Рис. 8: Данные о росте числа участников протестов в Англии в 1830 [2]

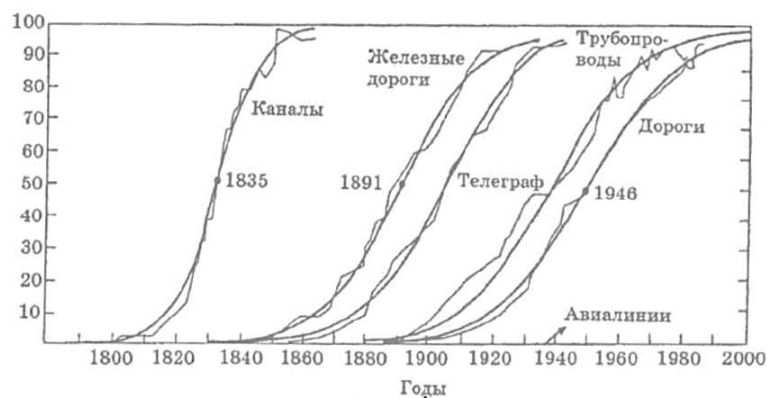


Рис. 9: Рост инфраструктуры США в XIX веке [2]

## 4 Модель Лотки - Вольтерры

Популяционная модель Ферхюльста с ограничением роста популяции не способна описать взаимодействие популяции одного биологического вида с другим, если эти популяции живут на одном ареале обитания. Модели такого типа появились в начале XX века для описания динамики двух конкурирующих популяций, которая часто называется в настоящее время моделью “хищник-жертва”.

Пусть  $x$  обозначает численность популяции “жертв”, например, зайцев, а  $y$  - численность популяции “хищников”, например лис, которые обитают на одной территории. Модель Лотки - Вольтерры представляет собой систему из двух дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -\mu y + \nu xy.\end{aligned}\tag{8}$$

Здесь коэффициенты  $\alpha, \beta, \mu, \nu$  - положительные числа. Для удобства будем полагать, что все переменные и параметры этого уравнения выбраны в безразмерном виде при некоторых заданных значениях характерных масштабов численности популяций жертв  $X_0$  и хищников  $Y_0$ , а так же масштаба времени  $T$ . При этом предполагается, что параметры модели  $\alpha, \beta, \mu, \nu$  приведены к этим характерным масштабам. Следовательно, реальные численности популяций жертв  $n_1$  и хищников  $n_2$  могут быть найдены с помощью следующих формул:

$$n_1 = X_0 \cdot x, n_2 = Y_0 \cdot y.$$

Реальные же моменты времени  $\tau$  могут вычислены по формуле:  $\tau = T \cdot t$ .

Как в химии, так и в биологии, модель Лотки-Вольтерры представляет собой кинетическую модель. Смысл основных слагаемых в ней следующий. В правой части первого уравнения слагаемое с коэффициентом  $\alpha$  соответствует, как и в модели Мальтуса, естественный прирост популяции с коэффициентом рождаемости  $\alpha$ . Второе слагаемое с коэффициентом  $\beta$  соответствует убыли численности популяции в единицу времени за счет парных встреч жертв концентрацией особей  $x$  с хищниками концентрацией особей  $y$ . Фактически это слагаемое означает, что при встрече “жертв” и “хищников” хищники съедают жертвы. Коэффициент  $\beta$  в этом случае соответствует вероятности хищнику съесть жертву при встрече, а произведение  $xy$  соответствует вероятности встречи.

В правой части второго уравнения первое слагаемое с отрицательным коэффициентом  $-\mu$  соответствует естественной смертности хищников в отсутствие возможности питаться жертвами. Идея этой модели заключается в

том, что предполагается рост численности жертв за счет того, что они питаются неким продуктом с неограниченным объемом ресурса. Однако жертвы являются пищевым ресурсом для хищников, в отсутствие которого они неизбежно вымирают. Второе слагаемое в правой части второго уравнения является положительным и описывает прирост популяции с эффективностью  $v$  за счет случайных встреч хищников и жертв.

Данная модель не интегрируется в элементарных функциях. Но фазовый портрет этой системы на плоскости  $x, y$  мы вычислить можем. Поделим почленно второе уравнение на первое. В результате находим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(\mu - vx)}{x(\alpha - \beta y)}$$

Это уравнение интегрируется с помощью разделения переменных. Его можно представить в следующем виде:

$$\frac{\alpha - \beta y}{y} dy = -\frac{\mu - vx}{x} dx.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$\alpha \ln|y| - \beta y + \mu \ln|x| - vx = C,$$

где  $C$  - постоянная интегрирования. Изолинии этой функции слева для различных значений  $C$  и параметрах  $\alpha = \beta = \mu = v = 1$  приведены на рис.10. На рис. 11 приведены в качестве примера графики изменчивости численности жертв  $x(t)$  и хищников  $y(t)$  для той же модели, что и на рис. 9. Эти кривые получены с помощью численного решения системы (8).

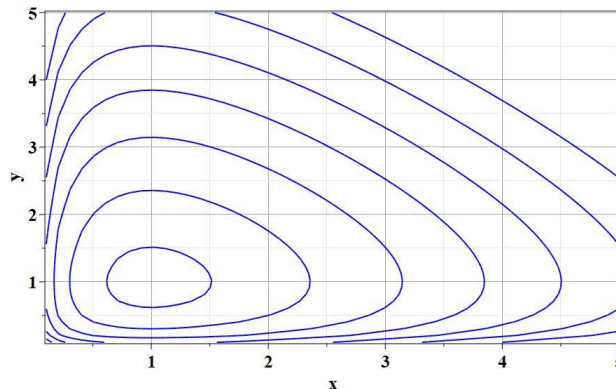


Рис. 10: Фазовые траектории модели Лотки-Вольтерры с параметрами  $\alpha = \beta = \mu = \nu = 1$

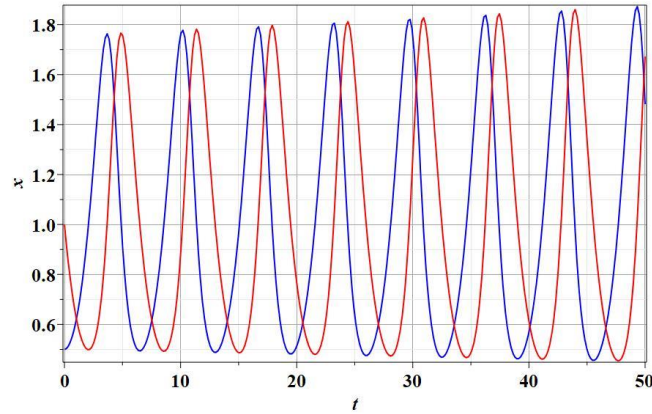


Рис. 11: Колебания переменных в модели Лотки-Вольтерры с параметрами  $\alpha = \beta = \mu = \nu = 1$  и начальными условиями  $x(0) = 0.5, y(0) = 1.0$

О полезности модели Лотки-Вольтерры (по крайней мере в качественном смысле) можно судить, глядя на натурные данные о численности лис и зайцев в одном и том же ареале обитания, которые приведены на рис. 12. Для сопоставления графиков на рис. 11 и 12 необходимо подходящим образом подобрать масштабы  $X_0, Y_0$  и  $T$ . Наиболее важным аспектом модели Лотки-Вольтерра является то, что она объяснила возникновение почти периодических колебаний численности популяций не за счет периодического изменения каких-либо внешних факторов, например, погодных или климатических, что вполне можно было бы ожидать, а, именно, внутренними причинами взаимодействия популяций. Однако в количественном отношении модели такого рода оказываются мало пригодными. Причина этого состоит в том, что нелинейные слагаемые в них слишком жестко определены, что приводит к существенным отклонениям от поведения реальных систем. Модели такого типа называются “жесткими”. О “жестких” и “мягких” моделях можно прочесть в очень полезной книге [9]

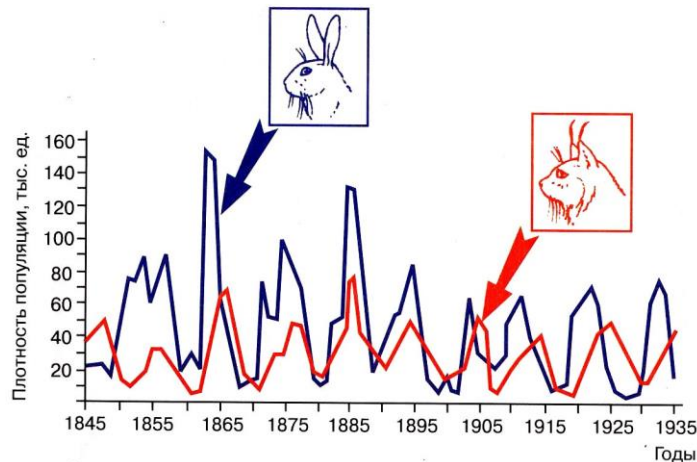


Рис. 12: Данные о численности лис и зайцев на одном ареале обитания [10]

## 5 Простейшие модели теории игр

Кинетические модели используются так же и в военной области, начиная с XIX века. Одной из простейших моделей такого типа является **модель военных действий Ланкастера**. Уравнения модели Ланкастера имеют следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha y, \quad \frac{dy}{dt} = -\beta x \quad (9)$$

Смысл этой модели состоит в следующем. Воюют две армии численностью  $x(t)$  и  $y(t)$ , соответственно. Каждый солдат первой армии за единицу времени уничтожает  $\beta$  солдат второй армии, так что ее численность за единицу времени уменьшается на  $\beta x(t)$ . В то же время, каждый солдат второй армии уничтожает  $\alpha$  солдат первой армии так, что ее численность за единицу времени убывает на величину  $\alpha y(t)$ . Задачей модели является оценка возможности победы одной из армий в зависимости от параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Как и при описании предыдущих моделей будем полагать, что переменные и параметры данной модели также приведены к безразмерному виду с некоторыми масштабами  $X_0$ ,  $Y_0$  и  $T$ . Так что реальные численности армий и время боевых действий должны вычисляться по формулам:

$$n_1 = X_0 \cdot x, \quad n_2 = Y_0 \cdot y, \quad \tau = T \cdot t.$$

Эта модель является интегрируемой. Поделив уравнения модели друг на друга, находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta x}{\alpha y}.$$

Разделяя переменные, находим:

$$y dy = \frac{\beta}{\alpha} x dx,$$

откуда находим интеграл движения системы:

$$\frac{1}{\alpha} x^2 - \frac{1}{\beta} y^2 = C \quad (10)$$

С геометрической точки зрения фазовые траектории данной системы при  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$  представляют собой гиперболы. Примеры фазовых траекторий приведены на рис. 13. Общий анализ фазовых портретов показывает, что существует одна специфическая прямая, называемая сепаратрисой, выше которой выигрывает одна армия, а ниже которой выигрывает вторая. Сепаратриса является прямой, соответствующая  $C = 0$ :

$$x = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} y.$$

Эта прямая изображена на рис. 13 белой линией. Если  $C > 0$ , то выигрывает одна армия, если  $C < 0$  - то другая. На рис. 14 представлены примеры изменения численности армий со временем для параметров  $\alpha = 1$  и  $\beta = 2$  и начальных условий: а)  $x(0) = 3$  и  $y(0) = 3$ , б)  $x(0) = 3$  и  $y(0) = 2$ , с)  $x(0) = 2$  и  $y(0) = 3$ , д)  $x(0) = 3$  и  $y(0) = 3\sqrt{2}$ . Если предполагать, что масштаб численности армий взят таким  $X_0 = Y_0 = 100000$ , а масштаб времени  $T=1$  год, то выбор параметров  $\alpha = 1$  и  $\beta = 2$  означает, что каждый солдат армии “синих” уничтожает в среднем за 1 год одного своего противника, а солдат “красных” – двух. В этом случае интервал времени боевых действий на рис. 13 соответствует трем годам. Аналогично оценивается период боевых действий на других рисунках, которые определяют время разгрома армии противника.

На рис. 14 а) представлен вариант, когда численности армий в начальный момент одинаковы. Поскольку эффективность бойцов красных выше, то выигрывает армия красных, истребляя армию синих. В этом случае  $C > 0$ .

Рис. 14 б) иллюстрирует ситуацию, когда армия красных превышает в начальный момент армию синих по численности. В этом случае красные побеждают армию синих за более короткий срок. В этом случае также  $C > 0$ . Случай, представленный на рис. 14 с) демонстрирует ситуацию, когда выигрывает армия синих за счет начального численного перевеса. В этом случае  $C < 0$ . И последний рис. 14 д) демонстрирует полное взаимное истребление обеих армий в случае, когда параметр  $C$  в выражении (10) обращается в ноль.

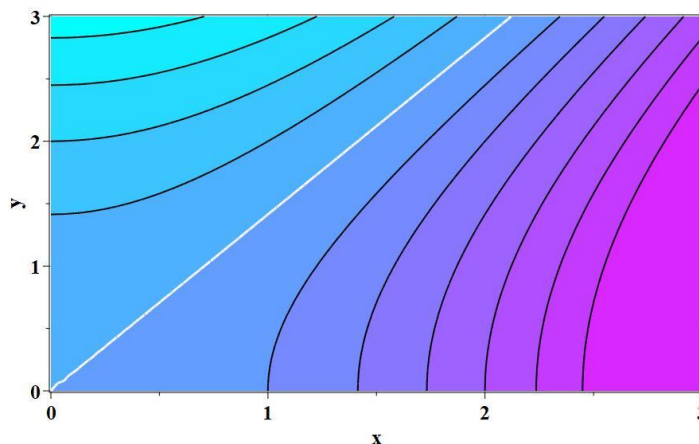


Рис. 13: Фазовый портрет модели Ланкастера для  $\alpha = 1$  и  $\beta = 2$

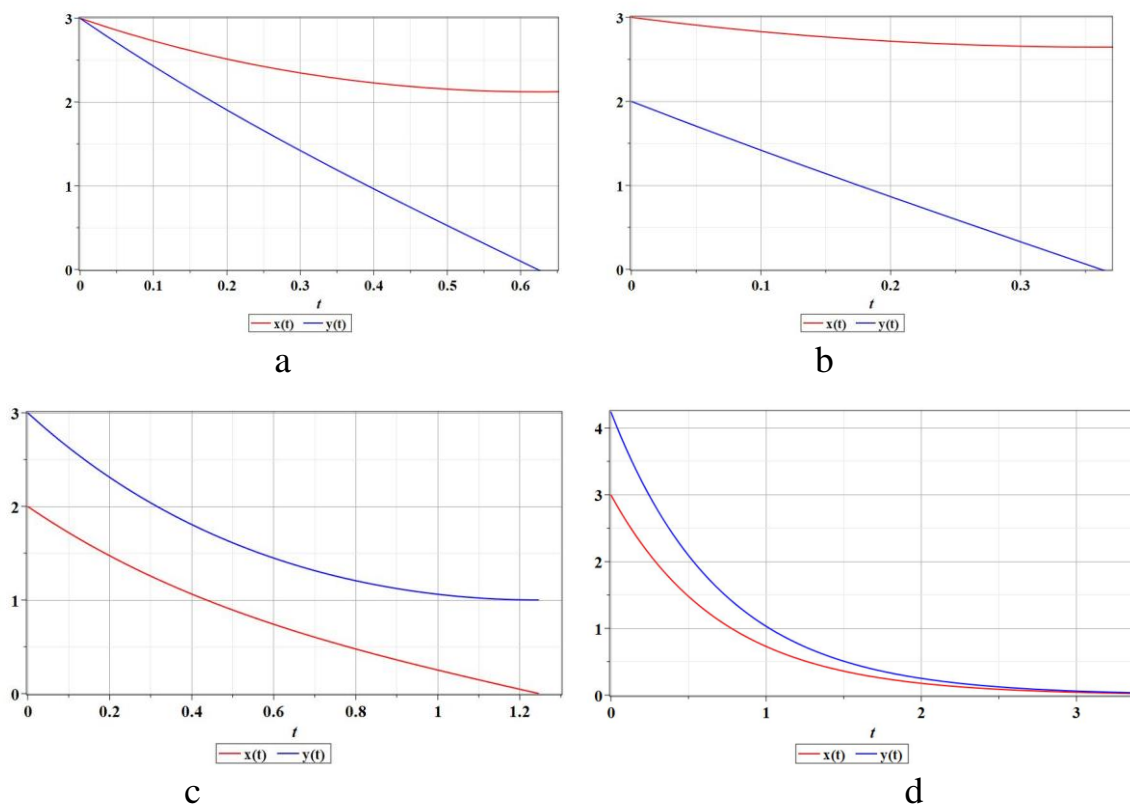


Рис. 14: Зависимость численности армий  $x(t)$  и  $y(t)$  для  $\alpha = 1$  и  $\beta = 2$  и начальных состояний

Эта простая модель не учитывает множества факторов, которые могут присутствовать в реальных условиях. Например, приток новых бойцов в армию, изменение эффективности действий бойцов армий за счет накопления опыта и т.д. Поэтому модель Ланкастера может служить лишь первым наиболее простым примером боевых действий, который, тем не менее, используется в игровых моделях.

## 6 Основные выводы

Приведенные примеры демонстрируют простейшие модели, используемые для объяснений некоторых общих явлений, возникающих в биологии популяций, социологии и военном деле. Полезность этих моделей состоит лишь в том, что они дают качественное понимание процессов. Для получения более точных предсказаний, как правило, требуется учитывать целый ряд других более сложных факторов. Часть таких моделей биологической эволюции можно найти, например, в [5]. В социологии и экономике в настоящее время также разрабатываются кинематические модели рассмотренного типа. Часть из них можно найти в [2, 3, 4]. Кинематические

модели также широко используются и в физике, в том числе, физической химии и биофизике [6, 7, 8, 9,10]. Некоторые дополнения к рассмотренным моделям можно найти в [11]. Для анализа более сложных моделей, для которых трудно бывает получить точные решения, позволяющие детально их анализировать, приходится прибегать к методам их качественного анализа. Качественный анализ будет темой следующей лекции.

## Список литературы

- [1] <https://en.ppt-online.org/241235>
- [2] Ю.М.Плотинский. Модели социальных процессов. Уч. пособие. М.: Логос, 2002.
- [3] Д.Д.Козырева, Н.Б. Анпилова. Математические модели в социологии и методы их анализа. Компьютерные инструменты в образовании, 2016. <http://ipo.spb.ru/journal>
- [4] М. Ю. Романовский, Ю. М. Романовский. Введение в эконофизику. Статистические и динамические модели. Издательство: Институт компьютерных исследований, 2012. 340 с.
- [5] Г.Ю. Ризниченко. Лекции по математическим моделям в биологии. Москва-Ижевск: РХД, 2002
- [6] А.М. Жаботинский. Концентрационные колебания. М.: Наука, 1974
- [7] П. С. Ланде. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997
- [8] Скотт Э. Нелинейная наука. Рождение и развитие когерентных структур. М.: Физматлит, 2007.
- [9] В.И. Арнольд. “Жесткие” и “мягкие” математические модели. М: МНЦО, 2000
- [10] Р. Дажо. Основы экологии. Перевод с фр. В. И. Назарова ; Редакция проф. В. В. Алпатова. – М. : Прогресс, 1975. - 415 с.
- [11] В.М. Журавлев, В.В. Самойлов, А.Л. Семенов. Моделирование гуманитарных процессов. УлГУ, 2012