УДК 510.2, 519.6, 511.11

Системы записи чисел, их точность и выполнение на практике численных вычислений с конечными, бесконечно большими и бесконечно малыми величинами

Я.Д. Сергеев
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия, Нижний Новгород
Калабрийский университет, Италия, Рендэ
yaro@si.deis.unical.it

Введение

Традиционно используемый в русском языке термин «система счисления» определяется как способ представления чисел с помощью письменных знаков и правил выполнения арифметических операций с ними. Присутствующее в термине слово «счисление» подчеркивает имеющийся в литературе (и в нашем сознании) сдвиг интереса в сторону «счисления», а не записи чисел. Как правило, в литературе по математике и информатике метод записи чисел, после того, как он был введен, отходит на второй план и принимается молчаливое соглашениео том, что произвольное, например целое, число может быть записано в любой известной системе счисления.

В настоящей работе подробно рассматривается второй аспект этого термина, а именно – различные способы записи чисел при помощи нумералов. Под нумералом в литературе понимается символ или группа символов, используемых для представления числа. Различие между нумералами и числами такое же, как между словами и идеями, которые выражаются словами, т.е. число есть концепция, которую выражает нумерал. Нумерал может быть написан или стерт, а число – нет. Одно и то же число может быть представлено различными нумералами, например, символы «4», «четыре», «IIII» и «IV» представляют собой различные нумералы, но все они выражают одно и то же число. Мы можем сказать, что системы нумералов принадлежат набору инструментов, который математики используют в своей работе, наблюдая при их помощи числа и объекты, построенные с использованием чисел.

В работе показывается, что различные системы записи чисел (различные инструменты) имеют разную точность и позволяют наблюдать разные множества чисел. Использование более развитой, более мощной системы нумералов дает возможность работать с большим набором чисел и получать более точные результаты.

Особое внимание в статье уделяется работе с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами. Показывается, что многие вычислительные трудности, возникающие при работе с бесконечностью (например, расходимости, неопределённые формы, некоторые парадоксы и т.д.) не обусловлены природой бесконечности, а являются следствием слабости традиционных систем записи чисел. Предлагается новая система нумералов (см. обзоры [9, 14]), позволяющая записывать бесконечно большие и бесконечно малые величины в явной форме конечным числом символов.

Предлагаемый подход позволяет построить простую и наглядную арифметику для выполнения численных вычислений на практике не только с конечными числами, но и с бесконечно большими, и с бесконечно малыми величинами. При этом наблюдаемое в окружающем нас мире свойство «часть всегда меньше целого», используемое при работе с конечными числами, естественно распространяется и на бесконечно большие, и на бесконечно малые величины. Отметим, что новый подход не противоречит теориям Кантора (см. [2]) и Робинсона (нестандартный анализ, см. [1, 6]), а дополняет их, постоянно отслеживая различие (мало исследованное классиками) между числами и нумералами и изучая возможность практического выполнения той или иной операции.

Свойства систем записи чисел

Современные позиционные системы записи чисел позволяют нам легко записывать очень большие и очень маленькие положительные и отрицательные числа и выполнять с ними арифметические операции. Однако, с исторической точки зрения появление этой системы записи произошло совсем недавно. Считается, что появление нуля произошло в Индии в 9 веке и привело к окончательному формированию позиционной системы записи. Затем она стала использоваться в арабском мире и в 1202 г., когда вышла книга Леонардо Фибоначчи «Liber Abaci», этот способ записи и счета начал проникать в Европу, где получил повсеместное распространиние только в 14 веке. Не смотря на всю ее силу, возможности позиционной системы ограничены с точки зрения выражения больших чисел (например, она не позволяет записать число, имеющее 10^{100} цифр).

До появления позиционной системы возможности записывать большие числа (и выполнять с ними операции) были еще более ограничены. Например, греческая система записи чисел использовала буквы греческого алфавита и не позволяла записывать большие числа. Эта проблема была хорошо понятна Архимеду, который в своей работе «Исчисление песка» (Псаммит) ввел специальные нумералы для выражения нужных ему больших чисел. Римская система записи гораздо удобнее греческой, но и она не позволяет записывать большие числа и имеет другие недостатки. Например, выполнение арифметических операций в ней чрезвычайно затруднительно. Для нас очень важно также, что ни греческая, ни римская системы записи не позволяют выразить ноль и отрицательные числа. Это означает, что выражение II-V является неопределенной формой, если вычислитель не знает о существовании нуля. Введение нумерала, выражающего ноль, позволяет избежать появления неопределенных форм этого типа и расширить множество чисел, с которыми можно выполнять вычисления, на отрицательные числа.

Еще более ограниченной является унарная система записи, в которой число n представляется в виде суммы n черточек (или камешков, зарубок и т.п.). Очевидно, что в силу физических ограничений выполнять арифметические операции в этой системе чрезвычайно тяжело и в ней просто невозможно записать сколь-нибудь большое число (попробуйте, например, выполнить операцию умножения числа ||||||||||||||||||||||||||||| на число ||||||||||||||||||, используя только эту систему нумералов).

Существуют и еще более слабые системы записи. В работе [5] описывается примитивное племя Пираха, живущее в наши дни в Амазонии и использующее очень простую систему нумералов для счета: один, два, много. Пираха не знают о существовании чисел больших двух и у них такие операции как 2+1 и 2+2 дают одинаковый результат, то есть «много». Используя свою слабую систему нумералов, они не в состоянии «видеть» числа 3 и 4, не могут выполнять арифметические операции с ними и, в целом, не в состоянии сказать что-либо об этих числах, поскольку в их языке нет ни слов, ни концепций для этого.

Необходимо отметить, что записи 1 + 2 = «много» и 2 + 2 = «много» не являются неправильными. Они правильные в системе счета Пираха, не знающих о существовании чисел 3 и 4. Интересно, что и для людей, знающих о числах 3 и 4, ответ «много» тоже не является ошибочным. Он является *неточным* (аналогично, когда мы говорим, что в парке у нашего дома много деревьев мы даем правильный, но неточный ответ). Для задач, решаемых Пираха, низкая точность ответа «много» является достаточной и такой ответ успешно используется ими на практике.

Наконец, существенным является тот факт, что не всегда возможно перевести точно число из одной системы нумералов в другую. Например, число 10 непредставимо в системе Пираха, его перевод «много» очевидно неточен. Можно привести и более привычный пример: результат операции $2 \cdot \pi$ невыразим в десятичной позиционной системе записи. Подчеркнем, что мы говорим о практических вычислениях, а следовательно, при их выполнении мы можем произвести только конечное число операций.

Другим важным моментом является невозможность смешивания в одном выражении нумералов, принадлежащих к различным системам записи. Например, выражение «много» + 5 не имеет смысла, а результат операции $||||||| \cdot 15^{12}$ невозможно вычислить без перевода числа ||||||| в более развитую систему записи.

Подведем итоги этого параграфа: (1) все существующие системы записи могут выражать только определенные множества чисел; (2) для любой из систем записи можно указать числа, невыразимые в этой конкретной системе; (3) разные системы записи могут выражать разные множества чисел и проблема точного перевода из одной системы в другую не всегда разрешима; (4) чем более развита система записи, тем больше чисел могут быть в ней представлены и тем легче выполнять арифметические операции с нумералами этой системы; (5) для выполнения некоторой операции необходимо, чтобы в системе записи были нумералы, необходимые для представления операндов и результата; (6) не все результаты операций могут быть выражены с одинаковой точностью; (7) введение в систему записи новых нумералов позволяет выразить большее количество чисел и может исключить из практики вычислений некоторые неопределенные формы.

Новая система нумералов для выполнения на практике численных вычислений с конечными, бесконечно большими и бесконечно малыми величинами

Вопросам, связанным с бесконечностью и бесконечно малыми величинами посвящена обширная литература (см., например [1, 2, 6]). Эти вопросы, как правило, затрагивают проблемы, напрямую связанные с основаниями математики. Те ответы на них, которые считаются удовлетворительными в каждый конкретный исторический период, активно используются как в формировании фундамента математики этого времени, так и при решении прикладных задач. Именно использование понятий бесконечно большого и бесконечно малого в численных вычислениях (в том числе и с применением компьютеров) и расширение границ их применения является основной задачей настоящего исследования.

Современная точка зрения на бесконечность во многом определяется идеями Георга Кантора, который показал, что существуют бесконечные множества, имеющие разную мощность (см. [2]). Хорошо разработанные современные системы записи конечных чисел позволяют проводить вычисления с высокой точностью с конечными величинами, однако, при работе с бесконечными числами мы испытываем трудности. Существующие системы счисления не позволяют нам численно работать с бесконечными и бесконечно малыми величинами на компьютере, используя те же формальные правила, что и при работе с конечными числами. Среди причин, которые не позволяют нам организовать такую работу, можно выделить, как минимум, следующие: существование неопределенных форм (например, ∞-∞, ∞/∞, $0 \cdot \infty$ и т.д.), невыполнение для бесконечности аристотелевского принципа “часть меньше целого” (действительно, для любого конечного x следует $x + 1 > x$, тогда как $\infty+1=\infty$) и невозможность хранения бесконечного числа знаков в конечной памяти компьютера.

Несмотря на перечисленные трудности, ввиду огромного значения понятия бесконечности для математики, люди стараются включить его в работу с компьютером, например, разрабатывая системы вычислений, использующие символы $+\infty$ и $-\infty$ или более сложные символьные системы, которые часто связаны с той или иной версией нестандартного анализа, кардинальными или ординальными (порядковыми) числами.

Нашей целью является решение прикладных задач и создание компьютера, выполняющего на практике *численные* (не символьные) вычисления с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами, *используя те же формальные правила, которыми мы пользуемся при работе с конечными числами*.

Для того, чтобы понять, как это можно сделать, вернемся к системе записи Пираха. Слабость их системы нумералов приводит не только к результатам 1 + 2 = «много» и 2 + 2 = «много», но и к следующим варажениям

«много» + 1 = «много», «много» + 2 = «много»,

которые очень близки нам в контексте наших современных математических операций с бесконечностью:

$$\infty + 1 = \infty, \qquad \infty + 2 = \infty.$$

Это сравнение наводит на мысль о том, что трудности, которые мы испытываем при работе с бесконечностью, не обусловлены природой бесконечности, а являются следствием слабости традиционных систем записи чисел. Как введение нумералов для выражения чисел 3 и 4 позволяет нам различить результаты операций 1 + 2 и 2 + 2, так и введение новых нумералов для выражения бесконечных (и бесконечно малых) чисел может позволить избежать появление записей вида «много» + 1 = «много».

В работах [7]–[12], [14, 16] предлагается новая позиционная система записи с бесконечной базой, позволяющая выражать бесконечно большие и бесконечно малые величины в явной форме конечным числом символов. При этом вводится новый нумерал ①, называемый гроссуан (большая единица), а символ ∞ исключается из числа используемых нумералов. Новый, физически ориентированный подход к численным вычислениям позволяет построить простую и наглядную арифметику для практической работы не только с конечными числами, но и с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами. При этом наблюдаемое в окружающем нас мире свойство “часть всегда меньше целого”, используемое при работе с конечными числами, естественно распространяется на бесконечно большие и бесконечно малые величины.

Предлагаемая методология позволяет вычислить у определённых бесконечных множеств число их элементов (см. [9, 14, 16]). Например, определить, что количество четных натуральных чисел равно ①/2, количество нечетных натуральных чисел тоже равно ①/2, число натуральных чисел равно ①, количество целых чисел равно 2①+1. Если мы из множества целых чисел исключим ноль, то число оставшихся чисел будет равно 2①. При этом следует ①/2 < ① < 2① < 2①+1. Аналогично, можно вычислить число элементов с точностью до одного элемента у определенных множеств континуальной мощности и показать, например, что $2^{①} < 10^{①} -1 < 10^{①} < 10^{①} +1 < ①^{①}$.

Отметим, что новый подход не противоречит взглядам Кантора, а дополняет их. Он позволяет провести более точные вычисления, поскольку новая системи записи богаче, чем кардиналы Кантора и позволяет различить большее количество бесконечных чисел. Аналогично тому, как это происходит при физических измерениях двумя приборами разной точности, ответы, предоставляемые обоими приборами, верны, но с разной точностью. Система нумералов, использующая ①, является более точным прибором по сравнению с системой нумералов, использующей кардиналы Кантора. При этом (как это было при введении нумерала 0, позволившего существенно расширить количество чисел, с которыми можно работать без появления неопределенных форм вида III-X) введение ① позволяет построить анализ, в котором не появляются неопределенные формы вида ∞-∞, ∞/∞, 0·∞ и т.д. Как следствие, бесконечные ряды становятся суммами с бесконечным числом слагаемых n, где значение n определяется в зависимости от решаемой задачи (например, ①/2, 3①, $①^2$-1), как это происходит и для конечных n.

Предлагаемый подход позволяет дать детальные ответы на серию классических вопросов и парадоксов, имеющих дело с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами. В частности, с новых позиций рассматриваются машины Тьюринга и Первая Проблема Гильберта (см. [15, 16]). В работах [8]–[12] обсуждаются границы применимости нового подхода и рассматриваются приложения (численный анализ, теория вероятности, оптимизация, фракталы). Построен программный прототип компьютера (получены патенты [3, 13, 17]), выполняющего численные (не символьные) вычисления с конечными, бесконечно большими и бесконечно малыми величинами.

Заключение

В работе показывается, что различные системы записи чисел (различные инструменты исследования) имеют разную точность и позволяют наблюдать разные множества чисел. Использование более развитой, более мощной системы нумералов дает возможность работать с большим набором чисел и получать более точные результаты при вычислениях. Предложена новая система нумералов, позволяющая выражать бесконечно большие и бесконечно малые величины в явной форме конечным числом символов. Описана новая вычислительная методология, позволяющая выполнять численные (не символьные) вычисления с бесконечными и бесконечно малыми величинами. Новый подход позволяет построить компьютер (получены патенты [3, 13, 17]), выполняющий численные вычисления с конечными, бесконечно большими и бесконечно малыми величинами. В заключение отметим, что некоторые философские аспекты новой вычислительной методологии рассматриваются в работе [4]. Тексты работ [8]-[12], [14]-[16] доступны по адресу [18].

Литература

1. Дэвис М. Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир, 1980. 236 с.
2. Кантор Г. Труды по теории множеств. М.: Наука, 1988. 431 с.
3. Сергеев Я.Д. Компьютерная система для хранения бесконечных, бесконечно малых и конечных величин и выполнения с ними арифметических операций, патент РФ № 2395111, 20.07.2010.
4. Сочков А.Л. Философские аспекты новейшей арифметики бесконечности // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия “Социальные науки”, 2009, № 3 (15), С. 72–77.
5. Gordon P. Numerical cognition without words: Evidence from Amazonia // Science. 2004. № 306. 15 October. pp. 496–499.
6. Robinson A. Non-standard analysis. Princeton University Press, 1996. 308 pp.
7. Sergeyev Ya.D. Arithmetic of infinity. CS: Edizioni Orizzonti Meridionali, 2003. 112 pp.
8. Sergeyev Ya.D. Misuriamo l’infinito // Periodico di Matematiche. 2006. № 6(2). pp.11–26.
9. Sergeyev Ya.D. A new applied approach for executing computations with infinite and infinitesimal quantities // Informatica. 2008. № 19(4), pp. 567-596.
10. Sergeyev Ya.D. Numerical point of view on Calculus for functions assuming finite, infinite, and infinitesimal values over finite, infinite, and infinitesimal domains // Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications. 2009. № 71(12), pp. e1688-e1707.
11. Sergeyev Ya.D. Evaluating the exact infinitesimal values of area of Sierpinski's carpet and volume of Menger's sponge // Chaos, Solitons & Fractals. 2009. № 42 pp. 3042–3046.
12. Sergeyev Ya.D. Numerical computations and mathematical modelling with infinite and infinitesimal numbers // Journal of Applied Mathematics and Computing. 2009. № 29, pp.177-195.
13. Sergeyev Ya.D. Computer system for storing infinite, infinitesimal, and finite quantities and executing arithmetical operations with them, EU patent 1728149. 03.06.2009.
14. Sergeyev Ya.D. Lagrange Lecture: Methodology of numerical computations with infinities and infinitesimals // Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino. 2010. № 68(2), pp. 95–113.
15. Sergeyev Ya.D., Garro A. Observability of Turing Machines: a refinement of the theory of computation // Informatica. 2010. № 21(3), pp. 425–454.
16. Sergeyev Ya.D. Counting systems and the First Hilbert problem // Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications. 2010. № 72(3-4), pp. 1701-1708.
17. Sergeyev Ya.D. Computer system for storing infinite, infinitesimal, and finite quantities and executing arithmetical operations with them, USA patent 7,860,914. 28.12.2010.
18. The Infinity Computer web page, http://www.theinfinitycomputer.com