УДК 537.872.3, 534.211, 538.95

В. М. Журавлев

ОПРОКИДЫВАЮЩИЕСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С СИЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[1]

Аннотация. *Актуальность и цели*. Волны в нелинейных средах без дисперсии описываются, как правило, квазилинейными уравнениями первого порядка, характерными для задач гидродинамики газа, жидкости и плазмы. Однако для таких разделов физики, как теория электромагнитных волн в нелинейных средах, описание волн строится на основе уравнений Максвелла, которые являются гиперболическими уравнениями второго порядка. В работе показывается, что между этими уравнениями существует тесная связь. В связи с этим возникает вопрос о существовании связи между процессами, которые описываются квазилинейными гиперболическими уравнениями первого и второго порядка. Целью исследования является построение точных решений нелинейных уравнений динамики электромагнитных волн, в том числе в среде с керровской нелинейностью при отсутствии дисперсии. Проведен анализ этих решений. *Материалы и методы*. Основной метод, используемый в работе, – построение решений уравнений Максвелла для волн в нелинейных диэлектриках без дисперсии как решений квазилинейных гиперболических уравнений первого порядка. Метод развит сначала для уравнений в произвольной конечной размерности, а затем применен к задаче распространения электромагнитных волн в среде с керровской нелинейностью. Исследование проводится на основе точных решений уравнений Максвелла и уравнений звуковых волн для широкого круга функциональных зависимостей параметров среды от амплитуды. *Результаты*. Найдены новые точные решения для произвольной размерности координатного пространства для исследуемых нелинейных уравнений. Установлена возможность произвольной траектории распространения фронта волн. Показано существование явления опрокидывания волн и формирование ударных волн в таких средах. Рассмотрены различные типы режимов распространения волн для различных типов симметрий начальных распределений. Анализируются процессы диссипации энергии при образовании разрывных решений. *Выводы*. Уравнения для оптических и акустических импульсов допускают классы точных решений, которые одновременно являются решениями квазилинейных уравнений. Множество решений задачи Коши для одномерных квазилинейных уравнений такое же, что и для уравнений параболического приближения уравнений Максвелла, используемых в оптике, и уравнений звуковых волн в акустике. В многомерном случае возникают сложные процессы, которые связаны с решениями в форме ривертонов. Формирование ударных электромагнитных волн сопровождается интенсивной диссипацией энергии волн при приближении их амплитуды к критическим величинам. Для керров-

[1] Настоящая работа выполнена в рамках федеральных целевых программ «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 годы», а так же работ в рамках государственного задания Минобрнауки России» № 2.1894.2011 и при частичной поддержке РФФИ (проекты 11-01-00747-а, 12-01-00660-а).

ской среды (с кубической нелинейностью) критические значения амплитуд существуют при любых положительных значениях параметра керровской нелинейности.

Ключевые слова: нелинейные электромагнитные волны, многомерные нелинейные уравнения, опрокидывание фронта, электромагнитные ударные волны, волны в нелинейных диэлектриках.

V. M. Zhuravlev

BREAKING ELECTROMAGNETIC WAVES IN A STRONGLY NONLINEAR MEDIUM

Abstract. *Background*. Waves in the nonlinear medium without dispersion are described, as a rule, with first-order quasi-linear equations, characteristic of the problems of gas, liquid and plasma hydrodynamics. However, for such branches of physics, as the theory of electromagnetic waves in nonlinear medium, the description of waves is based on Maxwell's equations, which are second-order hyperbolic equations. This paper shows a close link between these equations. In this regard, there arises a question about the existence of a link between the processes, which are described by first- and second-order quasi-linear hyperbolic equations. The aim of this study is to construct exact solutions of non-linear equations of electromagnetic waves dynamics, including the medium with Kerr nonlinearity when there is no dispersion. The analysis of these decisions is carried out. *Materials and methods*. The main method used in the work is the construction of solutions for Maxwell's equations for waves in nonlinear dielectrics without dispersion as solutions for first-order quasilinear hyperbolic equations. The method was first developed for the equations in arbitrary finite dmension, and then applied to the problem of electromagnetic waves propagation in the medium with Kerr nonlinearity. The study is based on exact solutions for Maxwell's equations and sound waves equations for a wide range of functional dependencies of the medium parameters on the amplitude. *Results*. New exact solutions for arbitrary dimension of the coordinate space for the nonlinear equations under study are found. The possibility of an arbitrary trajectory of the wave front propagation is established. The existence of the phenomenon of wave breaking and the formation of shock waves in such media is demonstrated. Various types of wave propagation modes for different types of initial distribution symmetries are considered. The processes of energy dissipation in the formation of discontinuous solutions are analysed. *Conclusions.* The equations for the optical and acoustic pulses allow for classes of exact solutions that are both solutions of quasilinear equations. The Cauchy problem solution set for one-dimensional quasi-linear equations is the same as that for equations of parabolic approximation of Maxwell's equations used in optics, and sound wave equations in acoustics. In the multidimensional case, there are complex processes that are connected with solutions in the riverton form. The formation of electromagnetic shock waves is accompanied by intense dissipation of wave energy when their amplitude approaches critical values. For a Kerr medium (with a cubic nonlinearity), the amplitude critical values exist for any positive values of the Kerr nonlinearity parameter.

Key words: nonlinear electromagnetic waves, multidimensional nonlinear equations, wave front breaking, electromagnetic shock waves, waves in nonlinear dielectrics.

Введение

Волны в нелинейных средах без дисперсии описываются, как правило, квазилинейными уравнениями первого порядка. Уравнения такого типа характерны для задач гидродинамики газа, жидкости и плазмы. Однако для таких разделов физики как теория электромагнитных волн в нелинейных средах, их описание строится на основе уравнений Максвелла, которые являются гиперболическими уравнениями второго порядка. В связи с этим возникает вопрос о существовании связи между процессами, которые описываются квазилинейными гиперболическими уравнениями первого и второго порядка. Характерным явлением, которое наблюдается в системах первого типа (квазилинейные гиперболические уравнения первого порядка), – это опрокидывание фронта волны и образование ударных волн. В работе [1] было впервые показано, что в электромагнитных системах при определенных условиях могут возникать явления опрокидывания волн. Возможность существования такого же явления в нелинейной керровской среде было показано в [2]. В работе [3] была найдена общая связь между большим классом нелинейных многомерных волновых уравнений с квазилинейными уравнениями первого порядка. Эта общая связь дает возможность исследовать некоторые нелинейные эффекты, которые могут возникать при распространении электромагнитных волн в диэлектриках и акустических волн в сжимаемой среде. В настоящей работе исследуются некоторые следствия развитой в [3] теории опрокидывания волн к некоторым задачам оптики и акустики.

1. Волны в нелинейной среде без дисперсии

Опираясь на [3], опишем некоторые основные положения развитой там теории. Связь между квазилинейными уравнениями первого порядка и нелинейными гиперболическими уравнениями второго порядка, описывающих распространение нелинейных электромагнитных волн в среде с нелинейной поляризацией, можно проследить и для многомерных систем. Для этого рассмотрим систему квазилинейных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial E}{\partial x_\alpha} = A_\alpha(E)E_t, \quad \alpha = 1,\ldots,n, \tag{1}$$

где $A(E) = (A_1(E),\ldots,A_n(E))$ – вектор-функция, зависящая от неизвестной функции $E = E(x,t)$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$ и t. Решением этой системы является функция $E = E(x,t)$, удовлетворяющая алгебраическому уравнению:

$$H(E, t + A_1(E)x_1 + \cdots + A_n(E)x_n) = 0, \tag{2}$$

где $H(\xi,\eta)$ – произвольная дифференцируемая функция двух аргументов $\xi = E$ и $\eta = t + (A,x)$, где $(A(E),x) = A_1(E)x_1 + \cdots + A_n(E)x_n$. Это устанавливается последовательным дифференцированием (2) по переменным $x_1,\ldots,x_n,t$:

$$E_\alpha H_\xi + (A_\alpha + (A'(E),x)E_\alpha)H_\eta = 0, \quad \alpha = 1,\ldots,n;$$

$$E_t H_\xi + (1 + (A'(E),x)E_t)H_\eta = 0. \tag{3}$$

Условием совместности этих уравнений является система уравнений (1).

Из системы уравнений (1) прямым дифференцированием находим важное следствие:

$$\Delta E = \frac{\partial}{\partial t}\left(| A |^2 E_t\right), \qquad (4)$$

где $| A(E) |^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha^2(E).$

Введем обозначение:

$$\Diamond_{|A|} = \Delta - \frac{\partial}{\partial t}\left(| A(E) |^2 \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

так что уравнение (4) можно записать в следующем виде:

$$\Diamond_{|A|} E = 0.$$

Важным свойством уравнения (4), вне зависимости от его интерпретации и типа нелинейности, является инвариантность его формы относительно преобразований вращения вектор-функции $A(E)$ в координатном пространстве R^n. Все такие преобразования оставляют инвариантной длину вектора $A(E)$ в R^n. Введем обозначение: $R(E) = | A(E) | = \sqrt{A_1^2(E) + \cdots + A_n^2(E)}$. Тогда вектор-функцию $A(E)$ можно представить в следующем общем виде:

$$A = R(E) n(E), \qquad (5)$$

где $n(E)$ – произвольный единичный вектор, зависящий от значения функции E. Вектор-функция $n(E)$ может быть связана с точкой на единичной сфере размерности $(n-1)$, угловые координаты которой зависят от E произвольным образом. Инвариантность формы уравнения (4) относительно выбора функциональной зависимости единичного вектора $n(E)$ от E означает, что решение (2) при любом выборе $H(\xi, \eta)$ и $n(E)$ является решением уравнения (4).

2. Физическая интерпретация уравнений

Уравнение (4), как и в одномерном случае, преобразуется к уравнению плоскополяризованных электромагнитных волн в среде с нелинейной поляризацией $P(E)$, связанной с вектор-функцией $A(E)$ соотношением

$$P'(E) = \frac{c^2}{4\pi} | A(E) |^2 - 1.$$

В этом случае уравнение (4) имеет точный вид уравнения Максвелла для электромагнитных волн в среде с нелинейной поляризацией $P(E)$:

$$c^2 \Delta E - E_{tt} = 4\pi \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(E), \qquad (6)$$

и соответствует отсутствию дисперсии в среде. Это определяет специфические условия его применения в электродинамике. В частности, такие условия описаны в [1, 2].

Другая физическая интерпретация уравнения (6) соответствует звуковым волнам в идеальном газе. Уравнения акустических волн в такой среде имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u^{\alpha}+\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\rho u^{\alpha}u^{\beta}=-\frac{\partial P}{\partial x^{\alpha}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\rho u^{\beta}=0.$$

Первое векторное уравнение этой системы – уравнение Эйлера для скорости потока u^{α}, а последнее – уравнение неразрывности. Для адиабатических звуковых волн в газе давление P является заданной функцией плотности газа ρ. Вычисляя дивергенцию от первого векторного уравнения этой системы, приходим к уравнению для ρ:

$$\rho_{tt}=\Delta P(\rho)+\frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\alpha}}\left(\rho u^{\alpha}u^{\beta}\right).$$

Пренебрегая последним слагаемым в правой части (инерционной нелинейностью) и переходя к одномерному случаю, получаем уравнение для давления в среде в следующей форме:

$$P_{xx}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho(P). \qquad (7)$$

В рассматриваемом одномерном случае

$$\rho'(P)=\frac{c^2}{V^2(E)}.$$

3. Точные решения квазилинейных уравнений первого прядка

Решения уравнения (4), совпадающие с решениями системы квазилинейных уравнений (1), обладают особыми свойствами, которые выделяют их из всех других типов возможных решений этого уравнения. Поскольку векторное поле $A=A(E(x,t))$ в заданный момент времени t зависит только от значения функции E, то оно постоянно на изоповерхностях функции E: $A\big|_{E=\text{const}}=\text{const}$. Однако согласно самим уравнениям (1) поле A коллинеарно в каждой точке пространства полю ∇E, которое всюду ортогонально гиперповерхности $E=E_0(t)$. Отсюда следует, что изоповерхностями функции E являются гиперплоскости, поскольку в любой точке этой гиперповерхности нормаль к ней имеет одно и то же направление, зависящее только от E. Поскольку, как уже отмечалось выше, форма уравнения (4) не зависит от направления поля A в каждой точке, то каждое решение (1), совпадающее с одним из решений (4) при заданной функции $R(E)=|A|$, будет определяться вектор-функцией $n(E)$. Отсюда следует, что решение системы (1) $E(x,t)$ при заданной функции $R(E)=|A(E)|$ определяется однозначно парой функциональных параметров $\{C_n, E(s,t)\}$, в которой C_n является независящей от времени однопараметрической кривой, называемой далее базовой:

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = n^\alpha(s), \quad A^\alpha(E(s)) = R(s)n^\alpha(s), \tag{8}$$

в координатном пространстве R^n, и функцией $E(s,t) = E(x(s),t)$, являющейся решением уравнения Хопфа:

$$\frac{\partial E}{\partial s} = R(E)\frac{\partial E}{\partial t}. \tag{9}$$

Пусть C_n – кривая, заданная уравнением (8). Тогда, используя систему уравнений (1), имеем

$$\frac{\partial E}{\partial s} = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial E}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial s} = \sum_{\alpha=1}^{n} R(E)E_t n^\alpha(E(s,t))n^\alpha(E(s,t)) = R(E)E_t. \tag{10}$$

Последнее равенство следует из условия $|n|^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} n^\alpha n^\alpha = 1$. Отсюда сразу следует (9). Заметим, что решение $E(s,t)$ уравнения Хопфа находится как решение уравнения

$$H(E, t + R(E)s) = 0, \tag{11}$$

где $H(\xi,\eta)$ – та же функция, что и в решении (2), это соответствует выбору параметра s по формуле

$$\sum_{\alpha=1}^{n} n^\alpha(E(s,t))x^\alpha(s) = s.$$

В результате решение (2) переходит в решение (11).

Такие решения в дальнейшем будем называть **ривертонами** («river'» – река). Как следует из приведенного утверждения, ривертоны представляют собой бегущие плоские волны, направление распространения которых в каждой точке пространства не меняется со временем и определяется касательной к кривой C_n. Значение же функции E на каждой гиперплоскости меняется со временем и представляет волну с опрокидывающимся фронтом. Кривая C_n фактически представляет собой проекцию характеристики ривертона на вещественное координатное пространство R^n. Сама же характеристика является траекторией фронта волны в пространстве-времени $R^n \times T$, где T – ось времени. Отметим также, что все построения для ривертонов имеют место и в случае $|A|^2 = 1$, т.е. когда уравнение (4) представляет собой уравнение Д'Аламбера.

Заметим, что для $n=1$ кривая C_n совпадает с одномерной осью x^1, а уравнение (1) переходит в уравнение Хопфа (9).

Если кривая C_n не является прямой, то гиперплоскости, ортогональные кривой C_n, будут пересекаться по некоторым гиперплоскостям. Совокупность всех точек пересечения гиперплоскостей, ортогональных C_n, заполняет в общем случае некоторую область $V^n \subset R^n$, которая целиком определяется геометрией кривой C_n. В общем случае в области V^n лежат точки, на которых пересекаются гиперплоскости $s = \text{const}$ бесконечное число раз. На границе этой области число пересечений конечно. Поэтому в V^n непрерывные решения отсутствуют. В некотором смысле границы областей V^n подобны каустикам в оптике, но определяются с геометрической точки зрения иначе.

4. Структура ривертонов

Пусть задана некоторая базовая кривая C_n ривертона в форме системы уравнений (8). Интегрируя эту систему, приходим к параметрическому заданию данной кривой в форме уравнений

$$x^{\alpha} = X^{\alpha}(s) = \int n^{\alpha}(s)ds + x_0^{\alpha}.$$

Постоянные x_0^{α} указывают положение кривой относительно начала координат. В этом случае гиперплоскости уровня $E = \text{const}$ в R^n, соответствующие заданному значению параметра s, можно записать в виде уравнения

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x^{\alpha} n^{\alpha}(s) = \sum_{\alpha=1}^{n} X^{\alpha}(s) n^{\alpha}(s) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\sum_{\alpha=1}^{n}\left[X^{\alpha}(s)\right]^2.$$

Две гиперплоскости, отвечающие двум значениям s_1 и s_2 параметра s, пересекаются в пространстве R^n по совокупности точек, являющихся решением двух таких уравнений:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} x^{\alpha} n^{\alpha}(s_1) = F(s_1), \quad \sum_{\alpha=1}^{n} x^{\alpha} n^{\alpha}(s_2) = F(s_2), \tag{12}$$

где

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\sum_{\alpha=1}^{n}\left[X^{\alpha}(s)\right]^2.$$

Эти совокупности точек образуют в R^n гиперплоскости размерности $(n-2)$. Огибающая множества всех таких гиперплоскостей будет образовывать границу разграничения областей однозначности и многозначности ривертона.

Огибающую области многозначности без ограничения общности можно вычислить следующим образом. Огибающая состоит из точек пересечения всех бесконечно близких гиперплоскостей при $s_1 \to s_2$. Систему (12) можно разрешить относительно первых двух координат x_1 и x_2, в результате чего они становятся функциями s_1 и s_2, а также остальных координат $x_3,\ldots,x_n$:

$$x_1(s_1,s_2) = \frac{G(s_2,x)n^2(s_1) - G(s_1,x)n^2(s_2)}{n^2(s_1)n^1(s_2) - n^2(s_2)n^1(s_1)}, \tag{13}$$

$$x_2(s_1,s_2) = -\frac{G(s_2,x)n^1(s_1) - G(s_1,x)n^1(s_2)}{n^2(s_1)n^1(s_2) - n^2(s_2)n^1(s_1)}.$$

Здесь

$$G(s,x) = F(s) - \sum_{\alpha=3}^{n} x^\alpha n^\alpha(s).$$

В пределе $s_1 \to s_2 \to s$ мы получаем уравнение гиперплоскости $E^{n-2}(s_1,s_2)$ размерности $(n-2)$, являющейся пересечением двух бесконечно близких гиперплоскостей $E = E(s_1)$ и $E = E(s_2)$. В пределе $s_1 \to s_2 \to s_0$ получаем множество $\{E^{n-2}(s_0)\}$ гирперплоскостей, зависящих от параметра s_0, образующих гиперповерхность G^{n-1}, к которой касательны все гиперплоскости $E = E(s_0)$ для значений параметра s_0 в некотором интервале (s_1,s_2). Поскольку все гиперплоскости $E = E(s)$ из интервала $s \in (s_1,s_2)$ касательны к G^{n-1}, то они пересекаются друг с другом в области, лежащей в R^n с одной стороны по отношению к G^{n-1}. Следовательно, гиперповерхность G^{n-1} разделяет области многозначности и однозначности ривертона, по крайней мере, для интервала (s_1,s_2) параметра s.

Переходя к пределу $s_1 \to s_2 \to s$ в соотношениях (13), получаем уравнения параметрического задания гиперповерхностей G^{n-1}:

$$x_1(s) = \frac{G_1'(s,x)}{N_1'(s)},\ x_2(s) = \frac{G_2'(s,x)}{N_2'(s)}, \tag{14}$$

где

$$G_1'(s,x) = \frac{d}{ds}\left(\frac{G(s,x)}{n^1(s)}\right),\ G_2'(s,x) = \frac{d}{ds}\left(\frac{G(s,x)}{n^2(s)}\right),$$

$$N_1'(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{n^1(s)}{n^2(s)}\right),\ N_2'(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{n^2(s)}{n^1(s)}\right).$$

На рис. 1. и 2 приведены примеры вычисления областей однозначности ривертонов для размерности координатного пространства $n = 2$ в случае кривых: $y = x^2$ (рис. 1) и $y = \sin(x)$ (рис. 2). На рисунках сплошными прямыми обозначены линии уровня $E = \text{const}$.

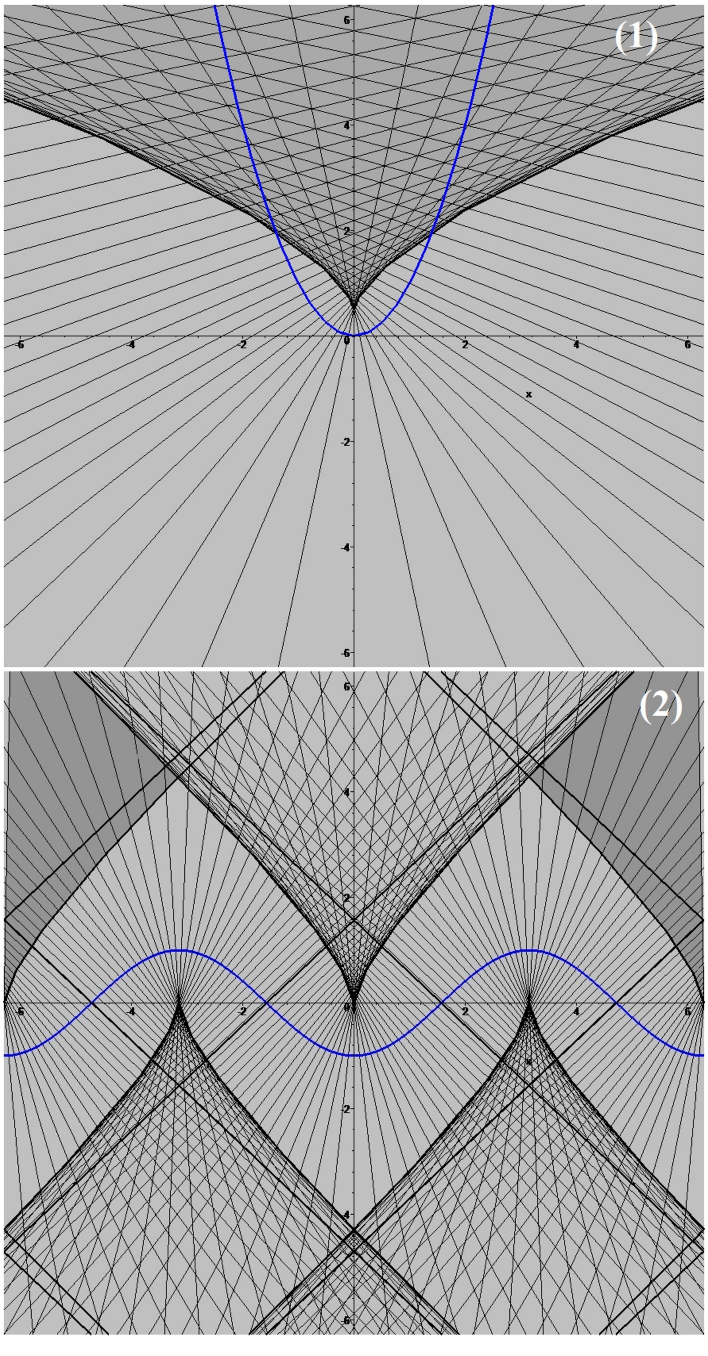


Рис. 1. Области однозначности ривертонов (светло-серые) для базовых кривых $y = x^2$ (1) и $y = -\cos(x)$ (2) (сплошная кривая)

Границы областей многозначности (на рисунках обозначены жирной кривой) задаются параметрически следующими соотношениями:

$$(1):\ X(s) = -4s^3,\ Y(s) = (1+6s^3)/2;$$

$$(2):\ X(s) = s - 2(s) + \sin(2s)/2,\ Y(s) = (1-\cos(2s))/\cos(s).$$

Рассматривая общие свойства огибающих, которые задаются уравнениями (14), легко понять, что в случае замкнутых кривых или кривых с самопересечениями области однозначности решений в форме ривертона отсутствуют. Однако в этом случае, дополняя решение некоторыми условиями периодичности, можно, по крайней мере для некоторых кривых, например окружностей, построить однозначные решения. Мы не будем доказывать этот факт специально, поскольку для окружностей он практически очевиден, а для более общего случая требует более детального анализа, что выходит за рамки данной работы.

5. Опрокидывание фронта

Как было показано выше, в одномерном и многомерном случае динамика фронтов определяется уравнением Хопфа (простой волны) (9). Отличие многомерного случая от одномерного заключается лишь в том, что ривертоны для размерности $n > 1$ распространяются вдоль криволинейных траекторий. Поэтому дальнейшие построения можно отнести как к одномерному случаю, так и к одномерному. Для этого достаточно в многомерном случае в дальнейших вычислениях заменить координату x на параметр s вдоль траектории ривертона.

В одномерном случае уравнения распространения электромагнитной волны в нелинейном диэлектрике описываются уравнением

$$c^2 E_{xx} - E_{tt} = 4\pi \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(E). \tag{15}$$

Здесь

$$P(E) = \frac{1}{4\pi} \int \left(1 - \frac{c^2}{V^2(E)}\right) dE\ - \tag{16}$$

поляризация среды как функция напряженности E поля в волне. Квазилинейное уравнение (1) в этом случае примет такой вид:

$$E_t \pm V(E) E_x = 0, \tag{17}$$

где $V(E)$ – локальная фазовая скорость волны. Оба знака в этом уравнении соответствуют одному и тому же уравнению (15), поскольку в него входит не сама функция $V(E)$, а ее квадрат.

Решение уравнения Хопфа в форме (17) задается в неявном виде с помощью алгебраического уравнения:

$$H_{\pm}(E, x \mp V(E)t) = 0, \tag{18}$$

где $H_{\pm}(E,\eta)$ – произвольные дифференцируемые функции двух аргументов E и $\eta = x \mp V(E)t$. Эти решения имеют место при произвольной зависимости функции $V(E)$ от E. В дальнейшем будем анализировать решения только для одного знака «+» в (17) (соответственно «–» в (18)). Второе решение строится аналогично.

Для нелинейных диэлектриков часто выражение для поляризации среды записывается в форме полинома третьей степени от напряженности поля E, что соответствует эффекту Керра. При этом кубический полином представляет наиболее значимые слагаемыми ряда Тейлора функции $P(E)$ в нуле $E=0$. Следуя этому общему предположению, рассмотрим функцию $P(E)$ следующего вида:

$$P(E) = P_0 + \alpha E + \beta E^2 + \gamma E^3. \tag{19}$$

Здесь P_0, α, β и γ – постоянные, характеризующие среду. Среда такого типа называется керровской. Из (16) находим скорость переноса напряженности:

$$V(E) = \pm \frac{c}{\sqrt{q^2 - 12\pi\gamma(E - E_0)^2}}, \tag{20}$$

где

$$q^2 = 1 - 4\pi(\alpha + \beta E_0), \quad E_0 = -\frac{\beta}{3\gamma}.$$

Для случая чисто квадратичной нелинейности поляризации $\gamma = 0$, который также особо рассматривается в ряде задач нелинейной оптики, имеем вместо (20) следующее соотношение:

$$V(E) = \pm \frac{c}{\sqrt{1 - 4\pi\alpha - 4\pi\beta E}}. \tag{21}$$

Явление опрокидывания связано с тем, что при гладком начальном возмущении в среде за конечное время возникает точка или точки, в которых производная от функции E обращается в бесконечность: $E_x \to \infty$. Важными характеристиками этого явления могут служить время t_*, за которое первоначально гладкое решение терпит разрыв, и координата точки в пространстве x_*, в которой этот разрыв образуется. Эти величины можно вычислить следующим образом. Почти без ограничения общности отношение (18) (для знака «–») можно представить в следующем виде:

$$E = E(x - V(E)t). \tag{22}$$

При таком представлении решения функция $E(\eta)$ связана с начальным распределением поля в среде:

$$E(x,0) = E(x).$$

Для уравнений (17) это условие определяет однозначно вид решения задачи Коши. Однако для уравнения (15) для полного решения задачи Коши необходимо еще одно начальное условие в силу того, что оно имеет второй порядок производной по t. Для полученного класса решений (22) таким решением является само уравнение (17), взятое в начальный момент времени:

$$E_t\big|_{t=0} = \pm V(E)E_x.$$

Дифференцируя (22) по x, находим

$$E_x = \frac{E_g}{1+E_gV'(E)x}.$$

Отсюда получаем, что момент времени обращения E_x в бесконечность определяется из условия

$$t_* = \frac{1}{E_gV'(E(x_*,t_*))}.$$

После момента t_* в решении образуется разрыв, который заменяет физически невозможное многозначное решение решением со слабым разрывом. Скорость перемещения этого разрыва можно вычислить, исходя из следующей общей формулы (см., например, [4]):

$$u = \frac{Q(E_2)-Q(E_1)}{E_2-E_1}, \tag{23}$$

где индексы $1,2$ относятся к значениям соответствующих величин до и после разрыва соответственно, а функция $Q(E)$ вычисляется по формуле

$$Q(E) = \int V(E)dE. \tag{24}$$

6. Диссипация энергии

При сопоставлении решений в форме опрокидывающихся волн или ривертонов в многомерном случае с реальными процессами существенную роль играет процесс диссипации энергии. В реальных условиях, как правило, многозначные функции не могут быть сопоставлены физическим процессам. В одной и той же точке пространства и времени приборами измеряется только одно значение физической величины. Поэтому в теории ударных волн многозначные решения заменяют однозначными решениями со слабыми разрывами [5]. При этом для разрывных решений на самом разрыве записывают условия, гарантирующие выполнение каких-либо физических условий (условия Гюгонио), например закона сохранения массы или энергии. Закон сохранения энергии на границе можно записать в форме выражения величины энергии, которая «выделяется» или «поглощается» на разрыве в зависимости от типа среды. Для ударных электромагнитных волн на наличие диссипации указывалось в [1]. Для явного вычисления скорости этой диссипации в рамках данного подхода рассмотрим скорость изменения энергии на пространственном отрезке среды, границы которого движутся по заданному закону: $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t)$. Плотность энергии, запасенной в электромагнитной волне, равна величине

$$\varepsilon(E) = \frac{1}{4\pi} D(E)E = \frac{1}{4\pi}(E + 4\pi P(E))E.$$

Тогда скорость изменения полной энергии $W(t)$ на отрезке $[x_1(t), x_2(t)]$ равна следующей величине:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_{x_1(t)}^{x_2(t)} \varepsilon(E)dx = \frac{dx_2}{dt}\varepsilon(E_2) - \frac{dx_1}{dt}\varepsilon(E_1) - G(E_2) + G(E_1). \qquad (25)$$

Здесь

$$G(E) = \int \varepsilon'(E)V(E)dE.$$

Выбирая точки $x_1(t), x_2(t)$ на краях разрыва, получаем скорость диссипации энергии на скачке ударной волны:

$$\frac{dW}{dt} = u(\varepsilon(E_2) - \varepsilon(E_1)) - G(E_2) + G(E_1). \qquad (26)$$

Аналогичным образом рассматривается задача о диссипации энергии в случае среды с проводимостью. В этом случае для скорости диссипации энергии имеем

$$\frac{dW}{dt} = u(\varepsilon(E_2) - \varepsilon(E_1)) - G(E_2) + G(E_1) - \lambda \int\limits_{x_1(t)}^{x_2(t)} \varepsilon'(E)V(E)dx. \qquad (27)$$

Используя эти выражения, можно предложить способ описания ударных волн в средах с дисперсией. Как уже указывалось, построенные решения отвечают среде без дисперсии. Однако в реальных средах, особенно оптических, практически всегда присутствуют дисперсионные эффекты. Дисперсионные эффекты приводят к тому, что короткие импульсы, особенно с разрывами, должны быстро расплываться. В нелинейных средах при определенных условиях возможен баланс между эффектами дисперсии и концентрацией энергии за счет самодействия импульсов, который приводит к образованию солитонов и уединенных волн. Если нелинейные эффекты превалируют над дисперсионным расплыванием импульсов, то в среде возможно опрокидывание солитонов и уединенных волн [2, 6], что и подтверждают изложенные выше результаты. Однако для описания динамики разрыва при наличии дисперсии возможны два подхода. Более точный путь излагается в следующем разделе. Однако существует более простой способ учесть изменение формы разрыва за счет дисперсионных эффектов, не вводя в рассмотрение самих эффектов дисперсии.

Основная идея учета дисперсии состоит в сравнении величины диссипации энергии разрывного решения по формулам (26) или (27) и величины энергии, уносимой из области разрыва спектральными компонентами импульса, лежащими вне области основной частоты с малой дисперсией. Очевидно, что условие малой дисперсии может реализовываться лишь в относительно небольшой области спектрального диапазона, занимаемого импульсом. Поэтому длина импульса должна быть достаточно большой, чтобы весь спектр был сосредоточен в нужном узком диапазоне частот. В силу этого построенные в [2] решения пригодны для описания фемтосекундных импульсов лишь в случае малой дисперсии в очень большом диапазоне частот.

Используя принцип равенства энергии диссипации энергии, уносимой спектральными компонентами в области большой дисперсии, можно в целом описать процесс опрокидывания фронта в средах с сильной нелинейностью. Достаточно длинный начальный импульс с узкой полосой частот в области малой дисперсии, двигаясь в среде с сильной нелинейностью, спустя некоторый интервал времени, превращается в волну с разрывом – ударную волну. При этом ширина спектра импульса растет, это означает, что все больше спектральных компонент попадает в область с другой групповой скоростью, чем скорость движения импульса, что приводит к «излучению» энергии импульсом. Опрокидывание фронта возможно, если энергия «излучения» в единицу времени меньше или равна скорости диссипации энергии за счет нелинейных потерь в соответствии с формулами (26) или (27). В момент образования разрыва спектр резко уширяется, при этом и диссипация, и излучение энергии становятся значительно большими, что может привести к исчезновению разрыва. После этого могут опять возникнуть условия опрокидывания фронта с повторением процессов, рассмотренных выше. Такой процесс может быть связан с явлениями типа самофокусировки лазерного излучения в кристаллах. Если рассмотренный механизм реализуется, то длинный импульс до исчезновения разрывов превращается в гребенку отдельных коротких импульсов, длина которых меньше или сравнима с длиной монохроматической волны на основной частоте.

7. Особенности динамики волн в нелинейных диэлектриках без дисперсии

Рассмотрим теперь некоторые особенности динамики волн в диэлектриках при сильной нелинейности, но малой дисперсии. Анализируя общие формулы для локальной фазовой скорости, можно перейти к следующей классификации возможных типов сред. Из соотношений для керровской среды видно, что поведение волн существенным образом зависит от знака и величины параметров γ и q^2. Имеются следующие возможные варианты:

$$C1)\ \gamma > 0,\ \ q^2 \ge 0;\ \ C2)\ \gamma > 0,\ \ q^2 \le 0;$$

$$C3)\ \gamma < 0,\ \ q^2 \ge 0,\ \ \ C4)\ \gamma < 0,\ \ q^2 \le 0.$$

В случае $C1$ значения функции $V(E)$ являются вещественными лишь в ограниченном диапазоне изменения напряженности поля E :

$$E_0 - \frac{q}{\sqrt{12\pi\gamma}} = E^- \le E \le E^+ = E_0 + \frac{q}{\sqrt{12\pi\gamma}}.$$

Вне этого диапазона скорость $V(E)$ становится чисто мнимой и уравнение (15) становится эллиптическим. В реальности это означает, что в среде развиваются диссипативные процессы.

В случае $C2$ при всех значениях напряженности E уравнение (15) является эллиптическим, а его решения перестают носить волновой характер.

В случае $C3$ при всех значениях напряженности E скорость $V(E)$ является вещественной, уравнение (15) является гиперболическим.

Для случая квадратичной нелинейности ($\beta \neq 0$) имеются два отдельных случая:

$$Q1)\ 1 - 4\pi\alpha > 0,\ \ \forall\beta \neq 0;\ \ Q2)\ 1 - 4\pi\alpha < 0,\ \ \beta > 0.$$

В первом случае ($Q1$) $V(E)$ является вещественной в ограниченном диапазоне значений E:

$$Q1a)\ \beta > 0,\ \ E < E_{cr} = \frac{1 - 4\pi\alpha}{4\pi\beta};$$

$$Q1b)\ \beta < 0,\ \ E > E_{cr} = -\frac{1 - 4\pi\alpha}{4\pi|\beta|}.$$

Во втором случае ($Q2$) $V(E)$ является чисто мнимой при всех E.

В данной работе рассмотрим только те ситуации, когда уравнение (15) является гиперболическим, т.е. случаи $C1$ и $C3$ и $Q1$. Случай $C4$, хотя и допускает области гиперболичности, но с точки зрения реальных оптических систем представляется экзотическим. Типичные графики локальной фазовой скорости $V(E)$ от напряженности для трех этих ситуаций приведены на рис. 2.

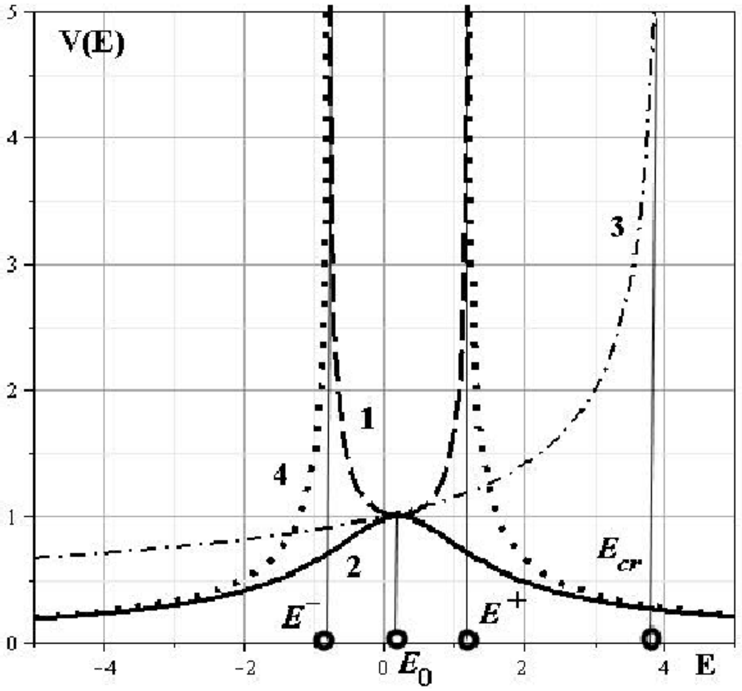


Рис. 2. Графики функции $V(E)$ для трех типов нелинейности:
1 – $C1$; *2* – $C3$; *3* – $Q1a$; *4* – $C4$

Вертикальными линиями на этих графиках показаны критические значения напряженности (E^- и E^+ для кубической нелинейности и E_{cr} – для квадратичной), при которых скорость $V(E)$ обращается в бесконечность. Именно при приближении локальной напряженности к этим критическим значениям возникают существенные эффекты диссипации энергии импульсов и изменение их формы. Во всех трех случаях функция $Q(E)$ вычисляется аналитически:

$$C1)\ Q(E) = \frac{c}{\sqrt{12\pi\gamma}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{12\pi\gamma}}{q}(E - E_0)\right),$$

$$C3)\ Q(E) = \frac{c}{\sqrt{12\pi|\gamma|}} \ln(E - E_0 + \sqrt{\frac{q^2}{12\pi|\gamma|} + (E - E_0)^2});$$

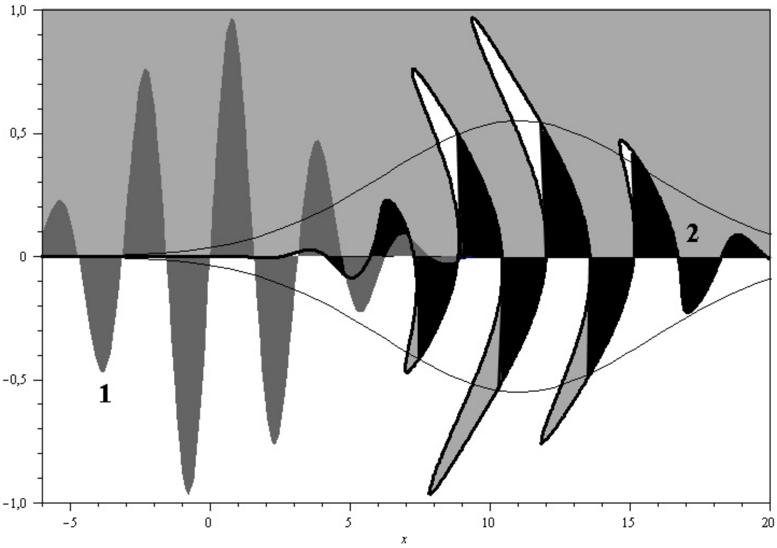
$$Q1)\ Q(E) = \pm sign\beta \frac{c}{4\pi\beta}\sqrt{1 - 4\pi\alpha - 4\pi\beta E}.$$

Это позволяет явно вычислять скорость перемещения разрывов в образующихся ударных электромагнитных волнах и диссипацию энергии в них.

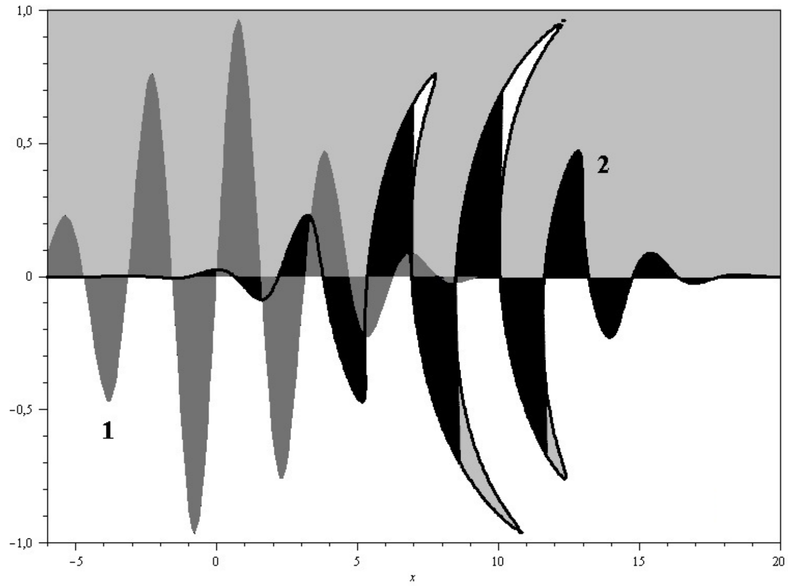
На рис. 3 для иллюстрации общих эффектов приведены типичные графики эволюции импульса со временем с указанием формирующихся разрывов функции $E(x,t)$ для случая двух случаев $C3$ и $C1$. На графиках видно, что форма огибающей, т.е. форма импульса, меняется незначительно. Уменьшается общая энергия импульса, что отражается на его амплитуде. Однако внутренняя структура импульса преобразуется в последовательность отдельных коротких импульсов с разрывами, длина которых совпадает в среднем с длиной волны, соответствующей основной частоте, как это обсуждалось выше. Переход к разрывным решениям указывает на то, что при образовании разрыва происходит диссипация энергии. Однако при этом сам механизм диссипации определяется самой системой. В частности, как это обсуждалось выше, диссипация энергии может быть связана с «излучением» энергии за счет передачи энергии в область частотного диапазона с достаточно большой дисперсией.

Заключение

Наиболее важными выводами, которые можно сделать из полученных соотношений, являются следующие. Во-первых, уравнения для оптических и акустических импульсов, которые рассматриваются обычно в рамках приближенных теорий, в реальности допускают классы точных решений, которые одновременно являются решениями квазилинейных уравнений (1) и (17). Множество решений задачи Коши для одномерных квазилинейных уравнений такое же, что и для уравнений параболического приближения уравнений Максвелла, используемых в оптике, и уравнений звуковых волн в акустике. Было показано, что опрокидывание волн существует в любой координатной размерности пространства и не является особенностью только одномерных систем. Более того, в многомерном случае возникают более сложные процессы, которые связаны с решениями в форме ривертонов.



а)



б)

Рис. 3. Графики функции $E(x,0)$ (*1*) и $E(x,t)$ (*2*) для $t>0$: ***а*** – $C3$; ***б*** – $C1$.
Разрывам соответствуют границы областей многозначности функции E

Произвольность базовой кривой ривертона при одной и той же нелинейности среды позволят исследовать модели со сложным распространением фронта ударных. Совокупный эффект опрокидывания фронта и произвольности направления распространения можно использовать для построения моделей волн в канале молний или самофокусировки лазерных импульсов в кристаллах. Вместе с тем в рамках данного подхода остаются неясными некоторые вопросы, в частности, вопрос о том, как ведут себя волны с начальными распределениями напряженности, для которых в начальный момент выполняются более общие начальные условия вида

$$E(x,0) = E(x), \quad \left.\frac{\partial E}{\partial t}\right|_{t=0} = J(x),$$

при произвольных функциях $E(x)$ и $J(x)$. Эта проблема связана с реализацией условий, при которых возникают описанные выше явления, и требует отдельного анализа.

Наиболее ярким эффектом, которым сопровождаются построенные точные решения, является опрокидывание фронтов и формирование ударных волн. При этом возникает интенсивная диссипация энергии импульса при приближении его амплитудных начальных значений напряженности к критическим величинам. Этот эффект невозможно получить с помощью приближенных методов теории медленно меняющейся амплитуды. В рамках предложенного подхода были явно вычислены эти критические значения напряженности поля. Для керровской среды (с кубической нелинейностью) критические значения амплитуд существуют при любых положительных значениях параметра γ (коэффициента у слагаемого с E^3) в функции поляризации, а для квадратичной нелинейности среды ($\gamma = 0$) при всех ненулевых значениях параметра β (коэффициента при E^2 в $P(E)$). При отрицательных значениях параметра γ критических амплитуд нет, и, хотя волновые импульсы и испытывают опрокидывание и диссипацию, этот эффект менее существенен, чем в случае положительных значений параметра γ. Поскольку эти выводы основаны на анализе точных решений полных уравнений Максвелла для изотропной среды с произвольной функциональной зависимостью поляризации от напряженности поля, то можно ожидать, что они имеют место в реальных системах.

Автор выражает искреннюю благодарность И. О. Золотовскому и Д. А. Коробко за полезные обсуждения темы данной работы и за ссылку на работу [2].

Список литературы

1. **Катаев, И. Г.** Ударные электромагнитные волны / И. Г. Катаев. – М. : Советское радио, 1963. – 148 с.
2. **Акопов, А. А.** Аналитическое решение волнового уравнения, описывающее бездисперсионное распространение фемтосеку / А. А. Акопов, Д. Л. Оганесян // Квантовая электроника. – 1997. – Т. 24, № 7. – С. 622–624.
3. **Журавлев, В. М.** Многомерные нелинейные волновые уравнения с многозначными решениями / В. М. Журавлев // Теоретическая и математическая физика. – 2013. – Т. 174, № 2. – С. 236–246.
4. **Уизем, Дж.** Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М. : Мир, 1977. – 622 с.
5. **Куликовский, А. Г.** Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, А. П. Чугайнова. – М. : МИАН, 2011. – 122 с.
6. **Богоявленский, О. И.** Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения / О. И. Богоявленский. – М. : Наука, 1991. – 320 с.

References

1. Kataev I. G. *Udarnye elektromagnitnye volny* [Electromagnetic shock waves]. Moscow: Sovetskoe radio, 1963, 148 p.
2. Akopov A. A., Oganesyan D. L. *Kvantovaya elektronika* [Quantum electronics]. 1997, vol. 24, no. 7, pp. 622–624.
3. Zhuravlev V. M. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2013, vol. 174, no. 2, pp. 236–246.
4. Uizem Dzh. *Lineynye i nelineynye volny* [Linear and nonlinear waves]. Moscow: Mir, 1977, 622 p.
5. Kulikovskiy A. G., Sveshnikova E. I., Chugaynova A. P. *Matematicheskie metody izucheniya razryvnykh resheniy nelineynykh giperbolicheskikh sistem uravneniy* [Mathematical calculation methods of discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic equation systems]. Moscow: MIAN, 2011, 122 p.
6. Bogoyavlenskiy O. I. *Oprokidyvayushchiesya solitony. Nelineynye integriruemye uravneniya* [Breaking solitons. Nonlinear integrable equations]. Moscow: Nauka, 1991, 320 p.

Журавлев Виктор Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической физики, Ульяновский государственный университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42)

Zhuravlev Viktor Mikhaylovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of theoretical physics, Ulyanovsk State University (42 Lva Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

УДК 537.872.3, 534.211, 538.95

Журавлев, В. М.

Опрокидывающиеся электромагнитные волны в средах с сильной нелинейностью / В. М. Журавлев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 3 (27). – С. 117–135.