УДК 530.182, 53.01, 51-7
DOI 10.21685/2072-3040-2020-2-9

В. М. Журавлев

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. В работе метод функциональных подстановок применяется к матричной системе первого порядка и выводятся соответствующие уравнения волновой динамики. Целью работы является вывод и анализ новой интегрируемой системы взаимодействия волн типа Бюргерса.

Материалы и методы. Основным методом, который используется в работе, является метод функциональных подстановок в матричной форме. Общий вид матричных уравнений представлен для произвольной конечной матричной размерности. Детальный анализ уравнений в покомпонентной форме представлен для размерности матриц 2×2.

Результаты. Получена новая интегрируемая система взаимодействия волн. Для размерности 2×2 выписаны уравнения в покомпонентной форме. Построена редуцированная система, подобная системе трехволнового взаимодействия. Найден общий вид точных решений для редуцированной системы. Приведены конкретные примеры вещественных несингулярных решений.

Выводы. С помощью метода функциональных подстановок найдена новая интегрируемая система взаимодействия волн, полезная для практического использования в прикладных задачах.

Ключевые слова: метод функциональных подстановок, интегрируемые матричные уравнения, взаимодействие волн.

V. M. Zhuravlev

ON ONE NONLINEAR INTEGRABLE MODEL OF WAVE INTERACTION

Abstract.

Background. In this work, the functional method is applied to a first-order matrix system and the corresponding equations of wave dynamics are derived. The aim of the work is the conclusion and analysis of a new integrable Burgers-type wave interaction system.

Materials and methods. The main method used in this work is the method of functional permutations in matrix form. The general form of matrix equations is

[1] Работа выполнена в рамках проекта FSSS-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования.

presented for an arbitrary finite matrix dimension. A detailed analysis of the equations in an exploded form is presented for the dimension of 2×2 matrices.

Results. A new integrable system of wave interaction is obtained. For dimension 2×2, the equations are written in component form. A reduced system is constructed, like a three-wave interaction system. The general form of exact solutions for the reduced system is found. Concrete examples of real non-singular solutions are given.

Conclusions. Using the method of functional substitutions, a new integrable system of wave interaction was found, which is useful for practical use in applied problems.

Keywords: functional permutation method, integrable matrix equations, wave interaction.

Введение

В статьях [1, 2] был разработан метод функциональных подстановок (МФП), который позволяет строить нелинейные интегрирумые модели волновой динамики, полезные в целом ряде прикладных задач. Общее описание метода вместе с рядом примеров приведены в работе [5]. Матричный вариант МФП позволил (см. [3–5]) получить ряд полезных и нетривиальных моделей, подобных известным моделям типа нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). В частности, в [4, 5] был развит метод многофункциональных подстановок, включающий в себя (как частный случай) и классический метод обратной задачи (МОЗ) [6, 7]. В настоящей работе приводится пример применения матричного варианта МФП к задачам волновой динамики, который частично был приведен в [5]. Приведенный пример может быть рассмотрен с двух точек зрения. Это теория неоднородных магнетиков [8] и теория взаимодействия волн, имеющая различные приложения. Также полностью приводится процедура вывода уравнений модели как в форме, близкой к уравнениям Ландау – Лифшица [8], которые используются в теории магнетиков, так и в форме уравнений, подобных теории трехволнового взаимодействия. Производится редукция уравнений системы к моделям, которые легче интерпретировать с точки зрения прикладных задач. Также приводятся решения вспомогательного матричного уравнения, которые позволяют строить различные варианты нелинейных моделей.

1. Метод матричных функциональных подстановок

Матричный вариант МФП [1–5] в размерности 1+1 строится на основе двух исходных соотношений, называемых базовыми, для одной вспомогательной матричной функции $\hat{T}(x,t)$ произвольной матричной размерности $n \times n$ с элементами, зависящими от двух независимых переменных x и t. Базовые соотношения могут иметь несколько различных форм [1, 2, 5]. Выбор той или иной формы определяется в первую очередь тем, как эти базовые соотношения связывают вспомогательную функцию $\hat{T}(x,t)$ с набором базовых функциональных параметров и вспомгательными уравнениями, которые, в конечном счете, и определяют форму искомых нелинейных уравнений. Простейшей формой базовых соотношений являются соотношения первого порядка следующего вида:

$$\hat{T}_x = \hat{A}\hat{T},\ \hat{T}_t = \hat{B}\hat{T}, \tag{1}$$

где $\hat{A}(x,t)$ и $\hat{B}(x,t)$ – комплексные матричные функции той же размерности $n\times n$, которые называются коэффициентами базовых соотношений. Если функция $\hat{T}(x,t)$ задана, то функциональные параметры $\hat{A}(x,t)$ и $\hat{B}(x,t)$ однозначно выражаются через саму функцию $\hat{T}$ и ее производные:

$$\hat{A}=\hat{T}_x\hat{T}^{-1},\ \hat{B}=\hat{T}_t\hat{T}^{-1}. \tag{2}$$

Эти соотношения представляют собой обобщенные дифференциальные подстановки и, в частном случае [2], совпадают с подстановкой Коула – Хопфа. С другой стороны, требование, что функция $\hat{T}(x,t)$ одновременно обращает в тождество два уравнения (1), накладывает на функции $\hat{A}(x,t)$ и $\hat{B}(x,t)$ ограничение, которое можно выразить в форме одного матричного уравнения:

$$\hat{A}_t-\hat{B}_x+[\hat{A},\hat{B}]=0, \tag{3}$$

совпадающего по форме с уравнением Захарова – Шабата в теории МОЗ [6], но имеющего несколько иной смысл, поскольку не содержит в явном виде спектрального параметра.

При выполнении (3) все производные функции $\hat{T}$ можно выразить через саму функцию $\hat{T}$:

$$\hat{T}^{[n,k]}=\frac{\partial^{n+k}}{\partial x^n\partial t^k}\hat{T}=\hat{A}^{[n,k]}\hat{T},$$

где матричные функции $\hat{A}^{[n,k]}$ могут быть вычислены рекуррентно по формулам:

$$\hat{A}^{[n+1,k]}=\hat{A}_x^{[n,k]}+\hat{A}^{[n,k]}\hat{A},\ \hat{A}^{[n,k+1]}=\hat{A}_t^{[n,k]}+\hat{A}^{[n,k]}\hat{B},\ k=0,1,\ldots, \tag{4}$$

с начальными условиями:

$$\hat{A}^{[1,0]}=\hat{A},\ \hat{A}^{[0,1]}=\hat{B}.$$

К базовой системе (1) можно добавить произвольное интегрируемое уравнение для $\hat{T}$. В качестве такого интегрируемого уравнения проще всего использовать линейное уравнение с постоянными коэффициентами $\hat{C}_{n,k}$ конечного порядка L:

$$\sum_{k=0}^{L}\sum_{k+n=0}^{L}\hat{C}_{n,k}\hat{T}^{[n,k]}=0. \tag{5}$$

Эти уравнения, называемые в дальнейшем **вспомогательными**, в итоге с помощью соотношений (2) и (4) после исключения из них всех производных функции $\hat{T}$ и ее самой превращаются в нелинейные уравнения, относительно элементов матричных функций $\hat{A},\hat{B}$:

$$\sum_{k=0}^{L}\sum_{k+n=1}^{L}\hat{C}_{n,k}\hat{A}^{[n,k]}+\hat{C}_{00}=0. \tag{6}$$

Вспомогательное уравнение в форме (6) вместе с уравнением (3) и системой равенств (4) образуют замкнутую систему относительно элементов двух функций $\hat{A}, \hat{B}$.

2. Матричные модели первого порядка

Рассмотрим вспомогательное уравнение для $\hat{T}$ следующего вида:

$$\hat{T}_t = \hat{H}(x,t)\hat{T}_x + \hat{Q}(x,t)\hat{T}, \tag{7}$$

где $\hat{H}(x,t)$ и $\hat{Q}(x,t)$ – некоторые заданные матрицы координат и времени. Используя базовые соотношения (1), получаем из этого уравнения следствие в виде уравнения связи:

$$\hat{B} = \hat{H}\hat{A} + \hat{Q}. \tag{8}$$

Подставляя это соотношение в уравнение связи (3), находим:

$$A_t = \frac{\partial}{\partial x}(\hat{H}\hat{A} + \hat{Q}) - [\hat{A}, \hat{H}\hat{A} + \hat{Q}]. \tag{9}$$

Это уравнение полезно преобразовать к следующему виду:

$$A_t - \hat{H}\hat{A}_x + [\hat{A},\hat{H}]\hat{A} + [\hat{A},\hat{Q}] - \hat{H}_x\hat{A} - \hat{Q}_x = 0.$$

Такое уравнение является нелинейным уравнением первого порядка относительно матрицы $\hat{A}$ с квадратичной нелинейностью и произвольными матрицами $\hat{H}$ и $\hat{Q}$ как функциями x и t. В частном случае:

$$\hat{H} = \hat{H}(t), \ \hat{Q} = \hat{Q}(t),$$

уравнение (9) упрощается и принимает такой вид:

$$A_t - \hat{H}\hat{A}_x + [\hat{A},\hat{H}]\hat{A} + [\hat{A},\hat{Q}] = 0. \tag{10}$$

Это уравнение имеет квадратичную нелинейность и может иметь несколько интерпретаций в зависимости от выбора его коэффициентов $\hat{H}$ и $\hat{Q}$, а также матричной размерности. Далее мы будем рассматривать уравнения, соответствующие матричной размерности 2 с матрицами $\hat{H}$ и $\hat{Q}$, зависящими только от t, или постоянными матрицами.

3. Уравнение типа Ландау – Лифшица

В качестве основного примера рассмотрим уравнение (10) в матричной размерности 2×2 для выбора его матричных коэффициентов в следующем виде (см. приложение):

$$\hat{H} = p(t)\hat{\sigma}_0 + (\mathbf{H}, \hat{\mathbf{s}}), \ \hat{Q} = q_0(x,t)\hat{\sigma}_0 + (\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{s}}). \tag{11}$$

Здесь введены трехмерные векторы:

$$\mathbf{H} = (H_1(t), H_2(t), H_3(t)), \ \mathbf{Q} = (Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t)).$$

Используя соотношения (32) (см. приложение), можно записать:

$$\hat{H}\hat{A}_x = \hat{\sigma}_0((\mathbf{H},\mathbf{a}_x) + pa_{0,x}) + i(\hat{s},[\mathbf{H}\times\mathbf{a}_x]) + a_{0,x}(\mathbf{H},\hat{\mathbf{s}}) + p(\mathbf{a},\hat{\mathbf{s}}),$$

$$[\hat{H},\hat{A}] = 2i(\hat{\mathbf{s}},[\mathbf{H}\times\mathbf{a}]), \tag{12}$$

$$[\hat{A},\hat{H}]\hat{A} = -2i(\hat{\mathbf{s}},[\mathbf{H}\times\mathbf{a}])a_0 + 2(\hat{\mathbf{s}},[[\mathbf{H}\times\mathbf{a}]\times\mathbf{a}]),\ [\hat{A},\hat{Q}] = 2i(\hat{s},[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{Q}]).$$

В результате (10) приводим к следующей системе уравнений для компонент матрицы $\hat{A}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}a_0 = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{H},\mathbf{a}) + pa_{0,x} - q_{0,x}, \tag{13}$$

$$\mathbf{a}_t = i[\mathbf{H}\times\mathbf{a}_x] - 2\big[[\mathbf{H}\times\mathbf{a}]\times\mathbf{a}\big] + 2i[\mathbf{H}\times\mathbf{a}]a_0 + \mathbf{H}a_{0,x} - 2i[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{Q}] - p\boldsymbol{a}.$$

Полагая: $a_0 = \varphi_x$, эту систему уравнений можно преобразовать к виду

$$a_0 = \varphi_x,\ \varphi_t = (\mathbf{H},\mathbf{a}) + pa_0 + q_0, \tag{14}$$

$$\mathbf{a}_t = i[\mathbf{H}\times\mathbf{a}_x] - 2\big[[\mathbf{H}\times\mathbf{a}]\times\mathbf{a}\big] + 2i[\mathbf{H}\times\mathbf{a}]\varphi_x + \mathbf{H}\varphi_{xx} + 2i[\mathbf{Q}\times\mathbf{a}] - p\mathbf{a}.$$

Система уравнений (14) представляет собой уравнение типа Ландау – Лифшица [8] для неоднородного магнетика, находящегося в однородном переменном магнитном поле с напряженностью $\mathbf{H}$ и с некоторыми дополнительными переменными $\mathbf{Q}$ и φ. Физический смысл этих переменных для задач с магнетиками требует отдельного анализа. Хотя это уравнение и отличается от уравнения Ландау – Лифшица для нелинейного магнетика Гейзенберга [8], тем не менее оно может быть использовано для анализа других типов магнетиков.

4. Редуцированная система

Для целей данной работы представляет интерес интерпретация системы уравнений (13) с точки зрения их использования в нелинейной волновой динамике. Для преобразования этой системы к нужному виду рассмотрим частный случай, соответствующий выбору:

$$\mathbf{H} = (0,0,c),\ \mathbf{Q} = (q_1,q_2,q_3), \tag{15}$$

где c,q_1,q_2,q_3, а также p,q_0 – комплексные постоянные. Тогда система уравнений (13) может быть записана в такой форме:

$$\varphi_t - p\varphi_x = a_3 c,$$

$$a_{3,t} = 2c(a_1^2 + a_2^2) + pa_{3,x} + c\varphi_{xx} + 2i(a_1q_2 - a_2q_1), \tag{16}$$

$$a_{1,t} - pa_{1,x} = -ica_{2,x} - 2a_3a_1c - 2ica_2\varphi_x + 2i(q_2a_3 - q_3a_2),$$

$$a_{2,t} - pa_{2,x} = ica_{1,x} - 2a_3a_2c + 2ica_1\varphi_x + 2ic(q_3a_1 - q_1a_3).$$

Делая подстановку $a_3 = (\varphi_t - p\varphi_x)c^{-1}$ и вводя функции $A^{\pm} = a_1 \pm ia_2$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\varphi_{tt} - 2p\varphi_{xt} - (c^2 - p^2)\varphi_{xx} = 2c^2 A^+ A^- + c(r^+ A^- - r^- A^+),$$

$$A_t^{\pm} + (c-p)A_x^{\pm} + 2A^{\pm}(\varphi_t + (c-p)\varphi_x + q_3) - 2r^{\pm}(\varphi_t - p\varphi_x) = 0. \qquad (17)$$

Здесь введено дополнительно обозначение: $r^{\pm} = (q_1 \pm iq_2)/c$.

5. Приведение к стандартному виду

Система уравнений (17) представляет собой гиперболическую систему уравнений взаимодействия волн, напоминающую модель генерации второй гармоники в трехволновом взаимодействии [6, 7]. Система уравнений (17) имеет несколько редукций, которые интересны сами по себе. Запишем эти уравнения в новых координатах, полагая $\xi = x - ut, \eta = x - vt$ и, таким образом приводя систему к каноническому виду гиперболической системы. Условия обращения в ноль коэффициентов при производных $\varphi_{\xi\xi}$ и $\varphi_{\eta\eta}$ имеют без ограничения общности следующий вид:

$$u = p - |c|, \ v = p + |c|. \qquad (18)$$

Полагая $c \neq 0$, приводим первое уравнение системы (17) к виду

$$2\phi_{\xi\eta} + A^+ A^- + \frac{1}{c}(r^- A^+ - r^+ A^-) = 0.$$

Второе уравнение системы (17) при этом оказывается таким:

$$\left(c + |c|\right) A_{\tau}^{\pm} + \left(c - |c|\right) A_{\xi}^{\pm} + 2A^{\pm}\left[\left(c + |c|\right)\varphi_{\tau} + \left(c - |c|\right)\varphi_{\xi} + q_3\right] -$$

$$-2|c| r^{\pm}\left(\varphi_{\xi} - \varphi_{\eta}\right) = 0. \qquad (19)$$

Два варианта выбора $c > 0$ и $c < 0$ симметричны по отношению к замене переменных $\tau \to \xi$ и наоборот:

$$A_{\tau}^{\pm} + A^{\pm}(2\varphi_{\tau} + q_3/|c|) - 2r^{\pm}(\varphi_{\xi} - \varphi_{\tau}) = 0, \ c > 0, \qquad (20)$$

$$A_{\xi}^{\pm} + A^{\pm}(2\varphi_{\xi} - q_3/|c|) - 2r^{\pm}(\varphi_{\tau} - \varphi_{\xi}) = 0, \ c < 0. \qquad (21)$$

Поэтому достаточно рассматривать только один из этих вариантов. Для определенности будем полагать $c > 0$.

5.1. Редукция к уравнению Лиувилля

Полагая $r^{\pm} = 0$, полученную систему можно привести к хорошо известному уравнению Лиувилля. При такой редукции второе уравнение системы (17) при $c > 0$ имеет явное общее решение следующего вида:

$$\ln A + 2\varphi = -\gamma\tau + \ln\psi(\xi),$$

где $\gamma = q_3/|c|$ и $\psi(x - ct)$ – некоторая комплекснозначная функция одного вещественного аргумента. В результате первое уравнение системы (17) (при $c > 0$) примет такой вид:

$$\varphi_{\xi\tau} = -\frac{1}{2} e^{-4\varphi} e^{-\gamma\tau} \mid \psi(\xi) \mid^2 . \qquad (22)$$

В случае, если $\varphi(\xi,\tau)$ – вещественная функция, проводя замену переменных $dX = \mid \psi(\xi) \mid^2 d\xi, dT = e^{-\gamma\tau} d\tau$, уравнение (22) приводим к уравнению Лиувилля:

$$\varphi_{XT} = -\frac{1}{2} e^{-4\varphi}.$$

Эта редукция показывает, что полученная система в общем виде подобна уравнениям взаимодействия волн в среде с квадратичной нелинейностью. Для сравнения можно вспомнить уравнения генерации второй гармоники [7]:

$$P_t + uP_x = \delta_1 PQ,\ Q_t + vQ_x = \delta_2 P^2.$$

Исключая из системы функцию Q с помощью первого уравнения этой системы, приходим к одному уравнению:

$$\Phi_{\xi\tau} = \frac{\delta_1 \delta_2}{(u - v)^2} e^{-2\Phi}.$$

5.2. Обобщенное уравнение типа Лиувилля

Приведем теперь в общем виде систему (17) к одному уравнению относительно функции φ. Решая пару уравнений (20) при $r^{\pm} \neq 0$ при $c > 0$ относительно $A^{\pm}$, находим:

$$A^{\pm} = \left(C^{\pm}(\xi) - r^{\pm} + r^{\pm} \frac{\partial}{\partial\xi} \int e^{2\varphi} d\tau \right) e^{-2\varphi} ,$$

здесь $C^{+}(\xi)$ и $C^{-}(\xi)$ – постоянные интегрирования по переменной τ. Подставляя эти соотношения в первое уравнение, приходим к одному уравнению для φ:

$$2\varphi_{\xi\tau} = \left(C^{+}(\xi) - r^{+} + r^{+}R \right)\left(C^{-}(\xi) - r^{-} + r^{-}R \right) e^{-4\varphi} -$$

$$-\left(r^{+}(C^{-}(\xi) - r^{-} + r^{-}R) - r^{-}(C^{+}(\xi) - r^{+} + r^{+}R) \right) e^{-2\varphi}, \qquad (23)$$

где $R = \frac{\partial}{\partial\xi} \int e^{2\varphi} d\tau$

Полагая в этом уравнении $C^{\pm} = r^{\pm} = \text{const}$, приходим к более упрощенной форме общего уравнения (23):

$$2\varphi_{\xi\tau} = r^{+} r^{-} R^2 e^{-4\varphi}, R_\tau = 2\varphi_\xi e^{2\varphi}.$$

6. Построение решений для вспомогательных уравнений первого порядка

Решения системы (13), также как и системы (17), строятся на основе решений уравнения (7). Из (1) и (36) (см. приложение) находим выражение для a_i, $i = 0,1,2,3$. Имеем:

$$a_i = \frac{1}{2}\mathrm{S}p\left(\hat{\sigma}_i \hat{T}_x \hat{T}^{-1}\right). \tag{24}$$

Представим матрицу $\hat{T}$ в следующем виде:

$$\hat{T} = \psi_0\hat{\sigma}_0 + \sum_{\alpha=1}^{3}\psi_\alpha\hat{\sigma}_\alpha, \tag{25}$$

где $\psi_i(x,t)$, $i = 0,1,2,3$, – функции, которые следует вычислить. Соответственно матрицу $\hat{T}^{-1}$ можно представить таким образом:

$$\hat{T}^{-1} = \frac{1}{D}\left(\psi_0\hat{\sigma}_0 - \sum_{\alpha=1}^{3}\psi_\alpha\hat{\sigma}_\alpha\right). \tag{26}$$

В результате получаем

$$\hat{T}_x\hat{T}^{-1} = \frac{1}{D}\left(\tau_{0,x}\hat{\sigma}_0 - \sum_{\alpha=1}^{3}\tau_{\alpha,x}\hat{\sigma}_\alpha\right)\left(\tau_0\hat{\sigma}_0 + \sum_{\beta=1}^{3}\tau_\beta\hat{\sigma}_\beta\right) = \frac{1}{2D}\left(D_x\hat{\sigma}_0 + \sum_{\alpha=1}^{3}R_\alpha\hat{\sigma}_\alpha\right).$$

Здесь введены обозначения:

$$D = \psi_0^2 - \psi_1^2 - \psi_2^2 - \psi_3^2,$$

$$R_\alpha = -\psi_{0,x}\psi_\alpha + \psi_{\alpha,x}\psi_0 + i\sum_{\beta,\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\psi_\beta\psi_{\gamma,x}, \ \alpha = 1,2,3.$$

Величины $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ представляют собой полностью антисимметричный символ Леви-Чивита. Общее решение уравнения (7) при условии $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$, $q_0 = q_3 = 0$ можно записать в таком виде:

$$\psi_0 = \int_C \Psi_0(x,t,\omega)d\omega, \ \psi_1 = \int_C \Psi_1(x,t,\omega)d\omega, \tag{27}$$

$$\psi_2 = \int_C (\Psi_2 \ x,t,\omega)d\omega, \ \psi_3 = \int_C \Psi_3(x,t,\omega)d\omega, \tag{28}$$

здесь

$$\Psi_0 = \frac{1}{Z(\omega)}\left(M(\omega)e^{\omega(x+ct)/c - p^2(x-ct)/4c\omega} + \right.$$

$$+F(\omega)e^{i(q_2x-iq_1ct)/c}-G(\omega)e^{-i(q_2x-iq_1ct)/c}\Big),$$

$$\Psi_1=\frac{1}{Z(\omega)}\Big(N(\omega)e^{\omega(x+ct)/c-p^2(x-ct)/4c\omega}+$$

$$+F(\omega)e^{i(q_2x-iq_1ct)/c}+G(\omega)e^{-i(q_2x-iq_1ct)/c}\Big),$$

$$\Psi_2=V(\omega)e^{\omega(x+ct)/c-p^2(x-ct)/c\omega},\ \Psi_3=U(\omega)e^{\omega(x+ct)/c-p^2(x-ct)/c\omega}. \qquad (29)$$

Параметры этого решения имеют такой вид:

$$Z(\omega)=16\omega^4-8(q_1^2-q_2^2)\omega^2+(q_1^2+q_2^2)^2,\ p^2=q_1^2+q_2^2$$

$$X(\omega)=(16(q_2-iq_1)\omega^2+4(q_2+iq_1)p^2),\ Y(\omega)=(16\omega^4+16i\omega^2q_1q_2-p^2),$$

$$M(\omega)=V(\omega)\omega X(\omega)+U(\omega)Y(\omega),$$

$$N(\omega)=iU(\omega)\omega X(\omega)-iV(\omega)Y(\omega).$$

Функции $U(\omega), V(\omega), F(\omega), G(\omega)$ комплексного спектрального параметра ω задаются начальными условиями.

Решения для функций $a_i(x,t)$, соответствующие общим решениям (27), можно представить в таком виде:

$$a_0=\phi_x=\frac{1}{2D(x,t)}\frac{\partial D(x,t)}{\partial x},$$

$$a_1=\frac{1}{2D(x,t)}\left(i\psi_2\psi_3\frac{\partial\ln(\psi_3/\psi_2)}{\partial x}+\psi_0\psi_1\frac{\partial\ln(\psi_1/\psi_0)}{\partial x}\right),$$

$$a_2=\frac{1}{2D(x,t)}\left(i\psi_2\psi_3\frac{\partial\ln(\psi_3/\psi_1)}{\partial x}-\psi_0\psi_2\frac{\partial\ln(\psi_2/\psi_0)}{\partial x}\right),$$

$$a_3=\frac{1}{2D(x,t)}\left(i\psi_2\psi_1\frac{\partial\ln(\psi_2/\psi_1)}{\partial x}+\psi_0\psi_3\frac{\partial\ln(\psi_3/\psi_0)}{\partial x}\right).$$

Соответственно:

$$A^+=a_1+ia_2=\frac{1}{D(x,t)}(\zeta\theta_x-\theta\zeta_x),\ \varphi=\frac{1}{2}\ln D(x,t), \qquad (30)$$

где $\theta=a_1+ia_2$, $\zeta=\psi_0-\psi_3$.

В случае дополнительной редукции $q_1=q_2=0$ система уравнений для компонентов функции $\hat{T}$ примет такой вид:

$$\psi_{0,t}=c\psi_{3,x},\ \psi_{3,t}=c\psi_{0,x},\ \psi_{1,t}=ic\psi_{2,x},\ \psi_{2,t}=-ic\psi_{1,x}.$$

Эти уравнения эквивалентны следующим уравнениям:

$$\chi_{tt}=c^2\chi_{xx},\ \tau_3=\chi_t,\ \tau_0=c\chi_x,$$

$$\theta_t^+ - c\theta_x^+ = 0,\ \theta_t^- + c\theta_x^- = 0,$$

где $\theta^+ = \tau_1 + i\tau_2$ и $\theta^- = \tau_1 - i\tau_2$. Функции χ, τ_1 и τ_2, вообще говоря, комплексные. Как уже отмечалось, в этом случае система уравнений редуцируется к уравнению Лиувилля.

Важным аспектом прикладных применений построенной системы уравнений является возможность находить условия вещественности и несингулярности ее решений относительно функции $\varphi(x,t)$. Функции $A^{\pm}$ могут быть комплексными.

Как показывает первичный анализ частных решений построенной нелинейной системы уравнений, большой набор вещественных решений может быть получен в случае выбора q_1 чисто мнимой величиной, а q_2 – вещественной. Однако в этом случае решения в большинстве своем оказываются сингулярными. Типичные примеры таких решений для функции $\varphi(x,t)$ приведены на рис. 1. На рис. 2 приведены соответствующие решения для функции $|A^+(x,t)|$. Эти решения получены для функций $\varphi_i(x,t)$, $i = 0,1,2,3$, следующего вида:

$$\psi_i(x,t) = \Phi_i(x,t,\omega) + \Phi_i(x,t,-\omega),\ i = 0,1,2,3.$$

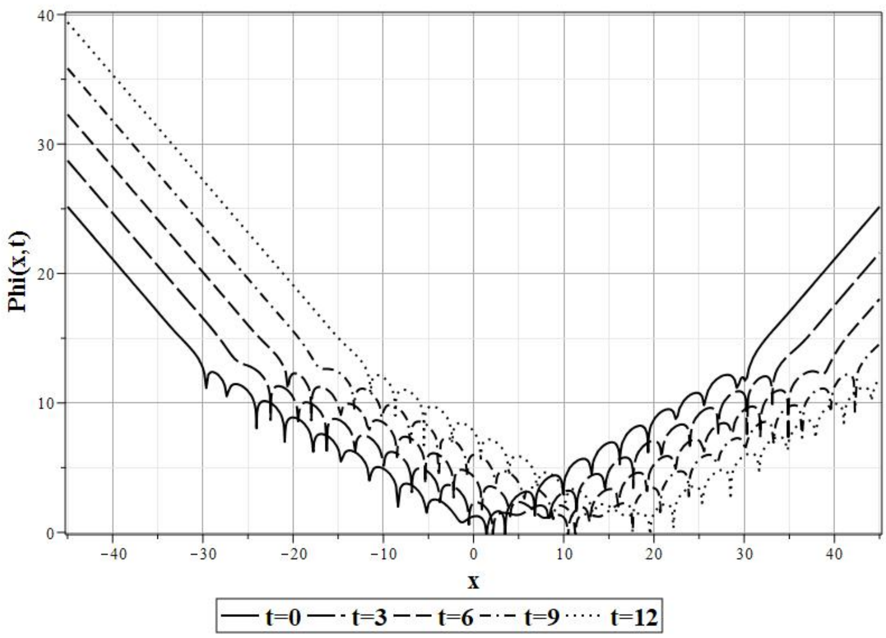


Рис. 1. Решение для φ при $c = -1, q_1 = 0,5i, q_2 = 1$ и $F(\omega) = -G(\omega) = \omega^2$

На рис. 1 приведены графики $\varphi(x,t)$ для $t = 0,3,6,9,12$ при выборе функций $U(\omega) = \omega^2/2$, $V(\omega) = \omega^2/2$, $F(\omega) = \omega^2$, $G(\omega - \omega^2$ и $\omega = 1$, $c = -1$, $q_1 = 0,5i$, $q_2 = 1$. Как видно из графиков, вблизи нулевых значений функции

$\varphi(x,t)$ имеется область, содержащая сингулярности как самой функции $\varphi(x,t)$, так и функции $|A^{+}(x,t)|$. Эта область перемещается как целое в положительном направлении оси x.

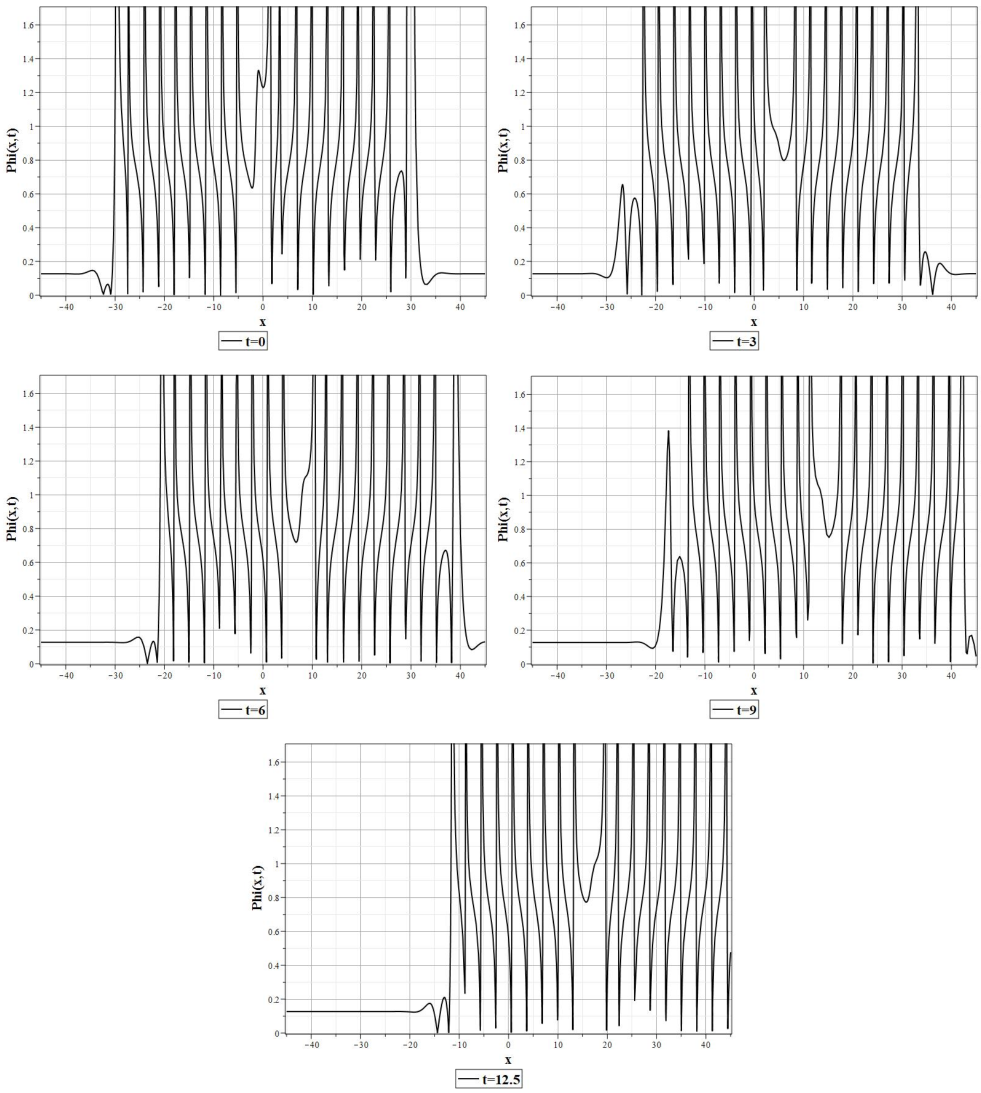
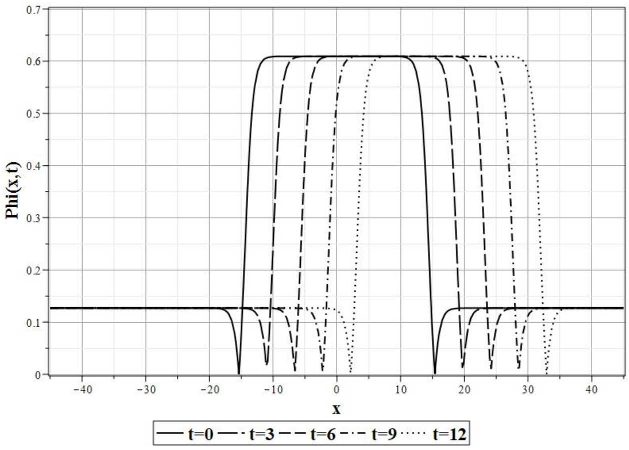
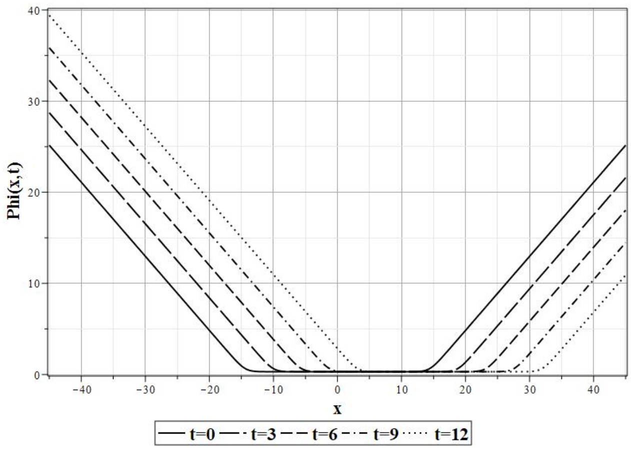


Рис. 2. Решение для $|A^{+}|$ при $c=-1, q_1 = 0{,}5i, q_2 = 1$ и $F(\omega) = -G(\omega) = \omega^2$

Несингулярные решения можно получить, если положить дополнительно $F(\omega) = G(\omega) = 0$. Типичные несингулярные решения приведены на рис. 3. Они соответствуют тем же значениям всех функций и параметров, что и на рис. 1, но при условии $F(\omega) = G(\omega) = 0$. Приведенные примеры решений не исчерпывают всех возможных типов решений. Для их анализа требуется отдельная дополнительная работа, которая выходит за пределы данной статьи.



а)



б)

Рис. 3. Решение для $|A^{+}|$ (***а***) и ϕ (***б***) при $c=-1, q_1=0,5i, q_2=1$ и $F(\omega)=G(\omega)=0$

Заключение

В работе рассмотрены новые примеры применения метода матричных функциональных подстановок к задаче отыскания интегрируемых нелинейных волновых уравнений. Ранее этот метод был описан в работах [1–3]. Построенные уравнения в предельном варианте переходят в уравнение Лиувилля и могут применяться в теории взаимодействия волн подобно моделям трехволнового взаимодействия и генерации второй гармоники в нелинейной оптике. В данной работе рассматривался только метод подстановок первого порядка в терминах работы [4], в которой был развит метод многофункциональных подстановок, включающий в себя и стандартный МОЗ в теории солитонов. Используя результаты указанной работы, можно получить многофункциональное расширение построенных решений при выборе тех же исходных матричных операторов. В работе приведен общий вид решений вспомогательного матричного уравнения. Это позволяет проводить подробные исследования типов решений построенных уравнений. Найденные в работе некоторые решения не исчерпывают всех возможных их типов.

Приложение
Формализм вычислений с матрицами размерности 2×2

Для анализа моделей, связанных с трехмерными векторами, полезно рассмотреть общие соотношения с матрицами размерности 2×2. Введем следующие обозначения для матриц Паули $\hat{\sigma}_\alpha$ и единичной матрицы:

$$\hat{\sigma}_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\hat{\sigma}_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\hat{\sigma}_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\hat{\sigma}_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \quad (31)$$

Матрицы $\hat{\sigma}_i$, $i=0,1,2,3,$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\hat{\sigma}_0\hat{\sigma}_i=\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_0=\hat{\sigma}_i,\ [\hat{\sigma}_0,\hat{\sigma}_i]=0,\ i=0,1,2,3;$$

$$\hat{\sigma}_\alpha\hat{\sigma}_\beta=-\hat{\sigma}_\beta\hat{\sigma}_\alpha=i\sum_{\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}_\gamma; \quad (32)$$

$$[\hat{\sigma}_\alpha,\hat{\sigma}_\beta]=2i\sum_{\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}_\gamma \quad \alpha,\beta,\gamma=1,2,3,$$

здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ – полностью антисимметричный символ Леви-Чивита: $\varepsilon_{123}=1$, $\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}=-\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}=-\varepsilon_{\alpha\gamma\beta}$.

Таким образом, любая матричная функция $\hat{T}(x,t)$, заданная на линейной алгебре матриц 2×2 GL_2, имеет следующий общий вид:

$$\hat{T}=\sum_{i=0}^{3}\psi_i(x,t)\sigma_i, \quad (33)$$

где $\psi_i(x,t)$ – вспомогательные функции, связанные с компонентами матрицы $\hat{T}$ соотношениями:

$$T_{11}=\psi_0+\psi_3,\ T_{11}=\psi_0-\psi_3,\ T_{12}=\psi_1-i\psi_2,\ T_{21}=\psi_1+i\psi_2.$$

Для удобства интерпретации полезно ввести трехмерный вектор матриц Паули:

$$\hat{\mathbf{s}}=(\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_2,\hat{\sigma}_3) \quad (34)$$

и трехмерный вектор $\boldsymbol{\psi}=\{\psi_1,\psi_2,\psi_3\}$. Тогда любая матрица 2×2 может быть записана в виде

$$\hat{T}=(\hat{\mathbf{s}},\boldsymbol{\psi})+\psi_0\hat{\sigma}_0, \quad (35)$$

где

$$(\hat{\mathbf{s}},\mathbf{t})=\psi_1\hat{\sigma}_1+\psi_2\hat{\sigma}_2+\psi_3\hat{\sigma}_3 \ -$$

евклидово скалярное произведение векторов. Обратные формулы для вычисления коэффициентов ψ_i матриц $\hat{T}$ размерности 2×2 имеют следующий общий вид:

$$\psi_i = \mathrm{Sp}(\hat{\sigma}_i \hat{T})/2, \quad i = 0,1,2,3, \tag{36}$$

где Sp – операция вычисления следа матрицы.

Пусть теперь имеются две матрицы $\hat{A}$ и $\hat{B}$, которые могут быть представлены в виде

$$\hat{A} = \sum_{i=0}^{3} a_i(x,t)\hat{\sigma}_i, \ \hat{B} = \sum_{i=0}^{3} b_i(x,t)\hat{\sigma}_i. \tag{37}$$

При введении векторов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ эти матрицы можно записать так:

$$\hat{A} = (\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{a}) + a_0\hat{\sigma}_0, \ \hat{B} = (\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{b}) + b_0\hat{\sigma}_0.$$

Согласно свойствам матриц Паули (31) имеем теперь следующие общие соотношения:

$$\hat{A}\hat{B} = i([\mathbf{a}\times\mathbf{b}], \hat{\mathbf{s}}) + a_0(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{s}}) + b_0(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{s}}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b})\hat{\sigma}_0,$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 2i([\mathbf{a}\times\mathbf{b}], \hat{\mathbf{s}}). \tag{38}$$

здесь $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$ – векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Библиографический список

1. **Журавлев, В. М.** Нелинейные уравнения, связанные с уравнениями теплопроводности и Д'Аламбера с помощью подстановок типа Коула – Хопфа / В. М. Журавлев, А. В. Никитин // Нелинейный мир. – 2007. – Т. 5, № 9. – С. 603–611.
2. **Журавлев, В. М.** Метод обобщенных подстановок Коула – Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений / В. М. Журавлев // Теоретическая и математическая физика. – 2009. – Т. 158, № 1. – С. 58–71.
3. **Журавлев, В. М.** Солитонные решения уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера и функциональные подстановки / В. М. Журавлев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 1. – С. 147–163.
4. **Журавлев, В. М.** Многофункциональные подстановки и солитонные решения интегрируемых нелинейных уравнений / В. М. Журавлев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 3. – С. 93–119.
5. **Журавлев, В. М.** Нелинейные интегрируемые модели физических процессов / В. М. Журавлев // Метод функциональных подстановок. – Ульяновск : Изд-во УлГУ, 2019.
6. Теория солитонов: Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. – Москва : Наука, 1980. – 319 с.
7. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Ж. Гиббон, Х. Моррио. – Москва : Мир, 1988. – 694 с.
8. **Гуревич, А. Г.** Магнитные колебания и волны / А. Г. Гуревич, Г. А. Мелков. – Москва : Физматлит, 1973. – 464 с.

References

1. Zhuravlev V. M., Nikitin A. V. *Nelineynyy mir* [Nonlinear world]. 2007, vol. 5, no. 9, pp. 603–611. [In Russian]

2. Zhuravlev V. M. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2009, vol. 158, no. 1, pp. 58–71. [In Russian]
3. Zhuravlev V. M. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2018, no. 1, pp. 147–163. [In Russian]
4. Zhuravlev V. M. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2019, no. 3, pp. 93–119. [In Russian]
5. Zhuravlev V. M. *Metod funktsional'nykh podstanovok* [Functional substitution method]. Ulyanovsk: Izd-vo UlGU, 2019. [In Russian]
6. Zakharov V. E., Manakov S. V., Novikov S. P., Pitaevskiy L. P. *Teoriya solitonov: Metod obratnoy zadachi* [Soliton Theory: inverse scatter method]. Moscow: Nauka, 1980, 319 p. [In Russian]
7. Dodd R., Eylbek Dzh., Gibbon Zh., Morrio Kh. *Solitony i nelineynye volnovye uravneniya* [Solitons and nonlinear wave equations]. Moscow: Mir, 1988, 694 p. [In Russian]
8. Gurevich A. G., Melkov G. A. *Magnitnye kolebaniya i volny* [Magnetic vibrations and waves]. Moscow: Fizmatlit, 1973, 464 p. [In Russian]

Журавлев Виктор Михайлович
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Самарский национальный исследовательский университет, (Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34); профессор, кафедра теоретической физики, Ульяновский государственный университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42)

Zhuravlev Viktor Mikhaylovich
Doctor of physical and mathematical sciences, leading researcher, Samara National Research University (34 Moskovskoye highway, Samara, Russia); professor, sub-department of theoretical physics, Ulyanovsk State University (42 L'va Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Образец цитирования:

Журавлев, В. М. Об одной нелинейной интегрируемой модели взаимодействия волн / В. М. Журавлев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 2 (54). – С. 94–108. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-2-9.