УДК 530.182, 53.01, 51-71
doi:10.21685/2072-3040-2021-4-13

Представление Лакса с операторами первого порядка для новых нелинейных уравнений типа Кортевега – де Вриза

В. М. Журавлев[1], В. М. Морозов[2]

[1,2]Самарский национальный исследовательский университет, Самара, Россия
[1]Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия
[1]zhvictorm@gmail.com, [2]aieler@rambler.ru

Аннотация. *Актуальность и цели*. Строится новое представление для уравнений типа Кортевега – де Вриза (КдВ). Предлагаемый подход позволяет получить универсальное представление Лакса для набора нелинейных уравнений в частных производных, для которых такое представление ранее не было известно. *Материалы и методы*. Построение представления Лакса для новых уравнений строится на основе редукции общего условия совместности двух нелинейных уравнений первого порядка с полиномиальной зависимостью от неизвестной функции. *Результаты*. Получена новая общая схема вычисления представлений Лакса в форме двух линейных операторов первого порядка со спектральным параметром для множества интегрируемых с помощью метода обратной задачи уравнений в размерности 1 + 1. Вычислены бесконечные серии дифференциальных законов сохранения для этих уравнений и указан специальный тип преобразований Бэклунда для них. *Выводы*. Для целого класса уравнений типа КдВ существует общая форма представлений Лакса, позволяющая применять к ним метод обратной задачи.

Ключевые слова: представленние Лакса, условия совместности нелинейных уравнений первого порядка, законы сохранения, преобразования Бэклунда

Финансирование: работа выполнена в рамках проекта 0777-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России и частично в рамках проекта РФФИ 20-02-00280.

Для цитирования: Журавлев В. М., Морозов В. М. Представление Лакса с операторами первого порядка для новых нелинейных уравнений типа Кортевега – де Вриза // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 4. С. 178–191. doi:10.21685/2072-3040-2021-4-13

Lax representation with first-order operators for new nonlinear Korteweg – de Vries type equations

V.M. Zhuravlev[1], V.M. Morozov[2]

[1,2]Samara National Research University, Samara, Russia
[1]Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia
[1]zhvictorm@gmail.com, [2]aieler@rambler.ru

Abstract. *Background.* In this work, a new representation is constructed for equations of the Korteweg – de Vries (KdV) type. The proposed approach allows to obtain a universal Lax representation for a set of nonlinear partial differential equations, for which such a representation was not previously known. *Materials and methods.* The construction of the Lax representation for the new equations is based on the reduction of the general compatibility condition for two nonlinear first-order equations with a polynomial dependence on the unknown function. *Results.* A new general scheme for calculating the Lax representations in the form of two linear operators of the first order with a spectral parameter for the set of 1 + 1 equations integrable using the inverse problem method is obtained in this work. Infinite series of differential conservation laws for these equations are calculated and a special type of Backlund transformations for them is indicated. *Conclusions.* For a whole class of equations of the KdV-type, there is a general form of Lax representations that allows the inverse problem method to be applied to them.

Keywords: Lax representation, conditions for the compatibility of nonlinear first-order equations, conservation laws, Backlund transformations

Acknowledgments: the research was financed by the state assignment to the winners of the competition of scientific laboratories of educational institutions of higher education subordinate to the Ministry of Education and Science of Russia within the project 0777-2020-0018 and the RFBR project 20-02-00280.

For citation: Zhuravlev V.M., Morozov V.M. Lax representation with first-order operators for new nonlinear Korteweg – de Vries type equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021;(4):178–191. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-4-13

Введение

Одним из основных подходов к точному анализу нелинейных моделей волновых процессов в настоящее время является теория солитонов, которая опирается на метод обратной задачи (МОЗ) [1–4]. Ключевым элементном МОЗ является представление Лакса, т.е. представление уравнения в форме условия коммутативности пары линейных операторов, снабженных нетривиальным спектральным параметром. Трудность применения МОЗ на практике в первую очередь связана с тем, что не существует в настоящее время простого способа отыскивать подходящее представление Лакса для любого наперед заданного уравнения физической задачи. Хотя в работах [5, 6] был предложен метод построения псевдопредставления Лакса – Захарова – Шабата почти любого нелинейного уравнения в форме условия коммутативности пары линейных уравнений, его применение затрудняет нетривиальный поиск спектрального параметра, позволяющего применять МОЗ. Только для ограниченной части уравнений это можно сделать простым образом. В связи с этим интерес представляют альтернативные способы представления исходных уравнений в форме совместности не только линейных, но и каких-либо других типов уравнений.

В данной работе рассматривается способ представления уравнений нелинейной волновой динамики в форме условия совместности пары нелинейных уравнений первого порядка по отдельным независимым переменным (координатам) относительно одной вспомогательной функции с переменными коэффициентами. Такой подход является, с одной стороны, развитием схемы метода функциональных подстановок [7, 8], а с другой – определенным образом связан с методом преобразований Бэклунда [2–4]. Конечной целью работы является получение относительно универсального способа построения новых полезных для практики интегрируемых нелинейных моделей волновых процессов типа Кортевега – де Вриза (КдВ) и их точных решений.

1. Условия совместности системы нелинейных уравнений первого порядка

Пусть $T(x,t)$ – некоторая дифференцируемая по каждой из переменных вспомогательная функция. Рассмотрим условие того, что существуют такие две функции $u(T,x,t)$ и $v(T,x,t)$, для которых совместна система из двух уравнений общего вида:

$$T_x = U(T,x,t),\ T_t = V(T,x,t). \tag{1}$$

Условием совместности этой системы является уравнение

$$U_t + VU_T = V_x + UV_T. \tag{2}$$

Достаточно общим способом выбора функций $U(T,x,t)$ и $V(T,x,t)$ является их представление в виде конечных полиномов по T:

$$U = \sum_{k=0}^{n} U_i(x,t)T^i,\ V = \sum_{k=0}^{n} V_i(x,t)T^i,$$

где $U_i(x,t)$, $V_i(x,t)$ – некоторые вспомогательные функции.

Подставляя эти соотношения в уравнение совместности и приравнивая нулю слагаемые при одинаковых степенях T, приходим к нелинейной системе из $(2n-1)$ уравнений для $(2n+2)$ относительно функций $U_i(x,t)$, $V_i(x,t)$. Таким образом, для произвольного конечного n система уравнений (1) оказывается не полностью замкнутой и содержит при $n>1$ три свободных функциональных параметра. Среди всех представлений с $n>1$ выделяется случай $n=2$. Такие представления встречаются в теории преобразований Бэклунда уравнений типа КдВ [2–4]. Как это будет показано далее, все такие представления эквивалентны универсальному представлению Лакса для множества нелинейных уравнений волнового типа, среди которых имеются и новые.

Для $n=2$ представление (1) запишем в следующей форме:

$$T_x = U(T,x,t) = A(x,t) + B(x,t)T + kT^2,$$

$$T_t = V(T,x,t) = P(x,t) + Q(x,t)T + W(x,t)T^2. \tag{3}$$

Будем предполагать, что коэффициент при T^2 в выражении для $U(T,x,t)$ является некоторой постоянной. Этот упрощенный вариант позволяет более наглядно продемонстрировать все основные этапы построения интегрируемых уравнений. Кроме этого, с помощью линейной замены функции $T \to T(x,t) + f(x,t)$ без ограничения общности можно свести к случаю $B \equiv 0$. Подставляя (3) в уравнения совместности (2) , приходим к трем нелинейным уравнениям:

$$P_x - A_t + AQ = 0, W_x - Qk = 0,$$

$$Q_x + 2WA - 2kP = 0. \tag{4}$$

Из последних двух уравнений этой системы можно вычислить явно функции $P(x,t)$ и $Q(x,t)$:

$$P=\frac{1}{2k}\left(Q_x+2WA\right),\ Q=\frac{1}{k}W_x, \tag{5}$$

и подставить их в первое. В результате получаем уравнение:

$$W_{xxx}+4kAW_x+2kWA_x-2k^2A_t=0, \tag{6}$$

содержащее две неизвестных функции $W(x,t)$ и $A(x,t)$.

Покажем, что уравнение (6) обладает представлением в форме коммутативности двух линейных операторов.

2. Универсальное представленние Лакса для уравнений типа КдВ

Заметим, что первое уравнение (3) представляет собой уравнение Риккати, которое линеаризуется с помощью подстановки:

$$T=-\frac{1}{k}\frac{\partial \ln Z(x,t)}{\partial x}. \tag{7}$$

В результате для функции $Z(x,t)$ имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+kAZ=0. \tag{8}$$

Преобразуем теперь второе уравнение (3) с помощью формальной замены:

$$A=T_x-kT^2. \tag{9}$$

В результате находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}T-\frac{1}{2k^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(2kWT+W_x\right)=0. \tag{10}$$

Используя подстановку (7), получаем дифференциальный закон сохранения следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial t}-\frac{W}{k}\frac{\partial \ln Z}{\partial t}+\frac{1}{2k}W_x\right)=0.$$

Отсюда следует, что при условии совместности (3) функция Z удовлетворяет еще одному линейному уравнению:

$$Z_t-\frac{W}{k}Z_x+\frac{1}{2k}W_xZ=\Lambda(t)Z, \tag{11}$$

где $\Lambda(t)$ – произвольная дифференцируемая функция t.

Поскольку уравнения (8) и (11) являются линейными относительно функции Ψ, им соответствуют линейные операторы:

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + kA, \qquad (12)$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2k}\left(2W\frac{\partial}{\partial x} - W_x\right) - \Lambda(t). \qquad (13)$$

Прямыми вычислениями устанавливаем, что условие коммутативности по модулю оператора $\mathbf{L}$ этих операторов

$$[\mathbf{L}, \mathbf{A}] = -2\frac{W_x}{k}\mathbf{L}, \qquad (14)$$

эквивалентно уравнению (6) .

3. Представления Лакса со спектральным параметром

Для того чтобы имелась возможность воспользоваться МОЗ для построения решений уравнения (6) , необходимо внести в структуру операторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}$ спектральный параметр такой, что сами уравнения, эквивалентные (6), его содержать не будут. Простейшим вариантом внесения спектрального параметра в структуру операторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}$ является использование постоянной k в качестве спектрального параметра. В этом случае, полагая $A = \delta + \left(2v_x + v^2\right)/(4k)$ и приравнивая по отдельности нулю слагаемые в уравнении (6) при различных степенях параметра k , приходим к системе из двух уравнений для функций $v(x,t)$ и $W(x,t)$.

Общий подход к внесению спектрального параметра в структуру операторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}$ состоит в представлении функций A и W в виде полиномов конечного порядка N по выбранному спектральному параметру с коэффициентами, зависящими от x,t :

$$A = \sum_{k=0}^{N} A_k(x,t)\lambda^k, \quad W = \sum_{k=0}^{N} W_k(x,t)\lambda^k. \qquad (15)$$

Общее число коэффициентов в разложении функций по параметру λ равно $3(N+1)$. Общая же степень полинома по λ , соответствующая уравнению совместности (6), равна $(3N+1)$. Таким образом, при любом порядке полиномов число уравнений на коэффициенты полиномов, следующих из (6), будет на 2 меньше числа свободных коэффициентов разложения (15).

Отметим, что представление с операторами (12) некоторых уравнений типа КдВ использовалось ранее, например, в [9]. В этой работе оно использовалось для построения деформации уравнения КдВ. Такое представление можно получить и для всех классических КдВ, включая высшие. Действительно, стандартное представление Лакса для уравнения КдВ

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad (16)$$

задается парой уравнений:

$$\mathbf{L}\psi = 0, \quad \mathbf{A}\psi = 0, \tag{17}$$

где операторы Лакса имеют следующий вид:

$$\mathbf{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t) - \lambda^2, \tag{18}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial t} + 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial}{\partial x} + 3u_x, \tag{19}$$

здесь λ – спектральный параметр. Формально дифференцируя первое уравнение системы (17) по x, получаем:

$$\psi_{xxx} = u_x\psi + u\psi_x + \lambda^2\psi_x. \tag{20}$$

Используя это соотношение, второе уравнение (17) приводим к виду, аналогичному (10):

$$\psi_t + 4\left(u_x\psi + u\psi_x + \lambda^2\psi_x\right) - 6u\psi_x - 3u_x\psi = 0,$$

которому соответствует оператор

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\partial}{\partial t} + 2\left(u - 2\lambda^2\right)\frac{\partial}{\partial x} - u_x.$$

Этот оператор по форме совпадает с оператором $\mathbf{A}$ представления (12), (13).

Согласно [10] оператор L всех высших КдВ имеет тот же вид, что и для классического КдВ (18), а операторы $\mathbf{A}_n$ порядка $(2n+1)$ можно представить в форме

$$\boldsymbol{A}_n = \frac{\partial}{\partial t} + c_n\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} + c_n\sum_{j=1}^{n}\left(b_j\frac{\partial^{2j-1}}{\partial x^{2j-1}} + \frac{\partial^{2j-1}}{\partial x^{2j-1}}b_j\right), \tag{21}$$

здесь $b_j, j = 1,\dots,n,$ – функционалы от $u(x,t)$. Вариант с $n=1$ соответствует классическому КдВ с $c_1 = 4$, а вариант $n = 2$ с $c_2 = 16$ – обобщенному КдВ пятого порядка. Для $n = 2$ имеем:

$$b_1 = \frac{5}{16}\left(3u^2 - u_x\right),\; b_2 = \frac{5}{4}u.$$

При этом само уравнение примет вид

$$u_t + u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_xu_{xx} + 30u^2u_x = 0. \tag{22}$$

Оператор $\mathbf{A}_2$ будет иметь вид

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\partial}{\partial t} + 16\left(\frac{\partial^5}{\partial x^5} + \left(2b_1 + 3b_{2,xx}\right)\frac{\partial}{\partial x} + 3b_{2,x}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b_2\frac{\partial^3}{\partial x^3} + b_{1,x} + b_{2,xxx}\right).$$

Вычисляя теперь с помощью первого уравнения (18) производную пятого порядка от ψ, находим:

$$\psi_{xxxxx} = \left(3u_{xx} + u^2 + 2u\lambda^2 + \lambda^4\right)\psi_x + u_{xxx} + 4u_x\left(u + \lambda^2\right). \qquad (23)$$

Используя (17), (20) и (23), находим, что оператор $\mathbf{A}_2$ может быть представлен в следующей форме:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\partial}{\partial t} + P_1(\lambda, x, t)\frac{\partial}{\partial x} + P_0(\lambda, x, t),$$

где

$$P_0 = -u_{xxx} - 2u_x\left(2\lambda^2 + 3u\right),\ P_1 = 2u_{xx} + 16\lambda^2 + 8\lambda^2 + 6u^2.$$

Таким образом, представление (12) с полиномиальными коэффициентами нельзя назвать абсолютно новым. Однако такое представление является универсальным по форме для множества уравнений, включающее не только уравнение КдВ и его высшие обобщения, но и уравнения других типов. Как показывает пример с (22), операторы представления для высших КдВ порядка $(2n+1)$ являются полиномами от λ порядка $2n$. Однако в данной работе мы рассмотрим разложения (15) в виде не более чем квадратичных функций от спектрального параметра. Примеры соответствующих разложений представлены в табл. 1, где использованы обозначения:

$$R(x,t,\lambda) = 2\left(Q(x,t) - \beta\Phi_x(x,t)\right)/(2k) - \lambda\Phi^2/(4k),$$

$$A_2(x,t,\lambda) = \eta(x,t) + \lambda m(x,t),$$

$$A_3(x,t,\lambda) = u(x,t) + (2v_x + \left(v+\lambda\right)^2\Big)/(4k),$$

$$A_4(x,t,\lambda) = \frac{1}{4k}\left(2v - 3u^2 + 2\lambda u - \lambda^2\right).$$

Таблица 1

Список вариантов разложения (15)

n	A	W
1	$\delta + \left(v_x - sv^2\right)/(2k)$	$w(x,t)$
2	$u(x,t) - w^{-2}(x,t)\lambda^2$	$v(x,t) + w(x,t)\lambda^2$
3	$A_3(x,t)$	$-v(x,t) + \lambda$
4	$A_4(x,t,\lambda)$	$v + \lambda u + \lambda^2$
5	$h + \lambda g/\zeta^2(x,t)$	$s_0 + \lambda\zeta(x,t)$
6	$P_0/k + \lambda R(x,t)$	$-C_0\lambda\Phi(x,t)^{-1}$
7	$u(x,t) - 2rv(x,t)\lambda + r\lambda^2$	$v(x,t) + \lambda$

Система из двух уравнений под номером 2 содержит одну произвольную функцию. Выбором функций в этом представлении можно получить уравнения КдВ, обобщенное уравнение Гарри Дима и ряд новых интегрируемых уравнений типа КдВ. В частности, если полагать $u = F(v)$, где $F(v)$ – произвольная дифференцируемая функция, то первое уравнение системы 2 (табл. 2) не будет содержать функции $w(x,t)$ и примет следующий вид:

$$v_{xxx} + 2kv_x\left(vF(v) + 2F(u)\right) - 2k^2F(v)v_t = 0.$$

Таблица 2

Список уравнений, соответствующий табл. 1

n	Уравнения
1	$4\delta w_x + 2svv_t - v_{xt} = 0,$
	$w_{xxx} + wv_{xx} - 2(swv - w_x)v_x - 2sv^2w_x = 0$;
2	$w^3\left(w_{xxx} + 2k\left(2uw_x + u_xw\right)\right) + 4ks^2\left(vw_x - v_xw\right) + 4s^2k^2w_t = 0$,
	$v_{xxx} + 2k\left(2uv_x + u_xv\right) - 2k^2u_t = 0$;
3	$kv_t + v_{xx} + 2vv_x + 2ku_x = 0,$
	$ku_t + 2(uv)_x - u_{xx} = 0$;
4	$ku_t + 6u^2u_x - 3(uv)_x - u_{xxx} = 0$
	$kv_t + 3(u(uv)_x - kuu_t - vv_x) - v_{xxx} = 0$
5	$4gk\left(k\zeta_t - s_0\zeta_x\right) + 4kh\zeta^3\zeta_x + \zeta^3\zeta_{xxx} = 0$
6	$k\Phi_t = 2C_0\dfrac{\partial}{\partial x}\left(Q/\Phi^2\right) + \beta C_0\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi^{-1}$
	$2kQ_t - k\beta\Phi_{x,t} + C_0\left(2P_0\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial^3}{\partial x^3}\right)\Phi^{-1} = 0$
7	$2krv_x - 6rvv_x + u_x = 0$
	$2k^2u_t - 2kvu_x - 4kuv_x - v_{xxx} = 0$

В случае $F = v^n + s_0$ имеем:

$$v_{xxx} + 2k\left((n+2)v^n + 2s_0\right)v_x - 2k^2nv^{n-1}v_t = 0,$$

при выборе $n = -2$ это уравнение переходит в уравнение Гарри Дима (уравнение 5 в табл. 2). В случае $F = e^v + s_0$ приходим к уравнению:

$$e^{-v}\left(v_{xxx} + 4ks_0v_x\right) + 2k\left(v+2\right)v_x - 2k^2v_t = 0.$$

Уравнение 3 (табл. 2) является комбинацией уравнений типа Бюргерса и при $u(x,t) \equiv 0$ в точности переходит в это уравнение. Уравнения 4 (табл. 2) являются аналогом пары уравнений типа мКдВ, но явно к ним не сводятся. Шестое и седьмое уравнения в табл. 2 являются новыми интегрируемыми уравнениями.

С помощью табл. 1 однозначно восстанавливается структура обоих операторов представления Лакса соответствующих уравнений из табл. 2.

4. Законы сохранения

Все законы сохранения для каждого уравнения из табл. 2 могут быть получены из одного общего дифференциального закона сохранения (10) и разложения функции T в ряд по обратным степеням спектрального параметра λ:

$$T = \sum_{j=-N_0} \tau_j(x,t)\lambda^{-j}, \tag{24}$$

здесь N_0 – целое число, соответствующее максимальной степени полинома $A(x,t)$ по спектральному параметру λ. Подставляя это разложение в (10), получаем бесконечную цепочку нетривиальных законов сохранения:

$$\frac{\partial\tau_j}{\partial t} = \frac{\partial J_j}{\partial x}, j = -N_0,\ldots,0,1,\ldots \tag{25}$$

Коэффициенты τ_j разложения T по λ^{-1} являются сохраняющимися плотностями дифференциальных законов сохранения. Для их вычисления необходимо использовать соотношения, получающиеся после подстановки разложения (24) в уравнение для T_x системы (3). Функции J_j, $j = -N_0,\ldots,0,1,\ldots,$ – токи, являются коэффициентами разложения функции $J = (2kwT + w_x)/\left(2k^2\right)$ в степенной ряд по λ.

Для системы 2 из табл. 2 выражения для функций $\tau_j(x,t)$ вычисляются с помощью рекуррентной системы соотношений:

$$\tau_{j+1} = \frac{1}{2k\tau_{-1}}\left(\tau_{j,x} - k\sum_{i=0}^{j-1}\tau_i\tau_{j-i}\right),\ j = 1,\ldots,$$

с начальными условиями:

$$\tau_{-1} = \frac{s}{\sqrt{kw}}, \tau_0 = -\frac{w_x}{2kw},\ \tau_1 = \frac{1}{2k\tau_{-1}}\left(\tau_{0,x} - u - k\tau_0^2\right).$$

При этом токи J_j в законе сохранения будут иметь следующий вид:

$$J_{-1} = k^{-1}(v\tau_{-1} + w\tau_1),\ J_0 = k^{-1}(v\tau_0 + w\tau_1) + (2k^2)^{-1}u_x,$$

$$J_j = k^{-1}\left(v\tau_j + w\tau_{j+1}\right),\ j = 1,2,\ldots$$

Наличие бесконечной серии законов сохранения гарантирует, по крайней мере частичную, интегрируемость приведенных уравнений. Возможность в явном виде эффективно строить их решения связана с решением обратной задачи для операторов представления Лакса. Для всех уравнений 2 из табл. 2 операторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}$ имеют стандартный вид, совпадающий по форме с представлением уравнения Гарри Дима ($u = v^{-2} + s_0$):

$$\mathbf{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + ku(x,t) - kw^{-2}(x,t)\lambda^2, \tag{26}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2k}\left(2W\frac{\partial}{\partial x} - W_x\right) - \Lambda(t).$$

Это гарантирует получение решений в форме N-квазисолитонов этих уравнений с помощью какого-либо варианта МОЗ. Однако некоторые функциональные параметры этих квазисолитонов могут удовлетворять неинтегрируемым уравнениям так, что точный вид N-солитонов может быть найден лишь для их частных решений. Это означает лишь частичную интегрируемость таких уравнений, что объясняет, почему почти все уравнения 2 для различных $u = F(v)$ не входят в классификацию интегрируемых уравнений типа КдВ [11, 12]. Однако эти вопросы выходят за рамки данной работы.

Для уравнения 6 из табл. 2 оператор представления Лакса L имеет вид, отличный от (26), что приводит к несколько нестандартной схеме решения обратной задачи. Тем не менее это уравнение также имеет бесконечную серию законов сохранения. Соответствующие соотношения для T_x имеют следующий вид:

$$\tau_{-1} = -\Phi / k, \tau_0 = \frac{1}{2k\Phi}\left(2Q - (\beta - 1)\Phi_x\right), \;\; \tau_1 = -\frac{1}{\Phi}\left(\tau_{0,x} - k\tau_0^2 - P_0 / k\right),$$

$$\tau_j = -\frac{k}{\Phi}\left(\frac{\tau_{j-1,x}}{k} + 2\tau_0\tau_{j-1} - \sum_{n=1}^{j-2}\tau_n\tau_{j-n}\right), \;\; j = 2,\ldots \tag{27}$$

Соответствующий набор законов сохранения имеет вид (25) с $N_0 = -1$ и токами:

$$J_{-1} = -\frac{C_0}{k^2\Phi^2}\left(2k\Phi\tau_0 - \Phi_x\right), \;\; J_j = -\frac{C_0}{k\Phi}\tau_{j+1}, j = 0,1,\ldots$$

Аналогичные законы сохранения могут быть получены и для других уравнений из табл. 2.

5. Преобразования Бэклунда

Рассмотрим теперь преобразование $T \to \Theta$, оставляющее неизменной форму представления (3), имеющее вид

$$T = \frac{\alpha(x,t,\lambda)\Theta(x,t,\lambda) + \beta(x,t,\lambda)}{\Theta(x,t,\lambda) + \gamma(x,t,\lambda)}. \tag{28}$$

В результате такого точечного преобразования с произвольными тремя параметрами $\alpha(x,t), \beta(x,t), \gamma(x,t)$ система (3) превращается в систему:

$$\Theta_x = A_1(x,t,\lambda) + B_1(x,t,\lambda)\Theta + K_1(x,t,\lambda)\Theta^2,$$

$$\Theta_t = P_1(x,t,\lambda) + Q_1(x,t,\lambda)\Theta + W_1(x,t,\lambda)\Theta^2. \qquad (29)$$

Если функция $T(x,t,\lambda)$ удовлетворяет уравнениям (3) для некоторых функций $A(x,t,\lambda)$, $W(x,t,\lambda)$, то функция $\Theta(x,t,\lambda)$ удовлетворяет (29). Коэффициенты нового представления вычисляются прямой подстановкой (28) в (3).

Введем обозначение:

$$D = \alpha(x,t,\lambda)\gamma(x,t,\lambda) - \beta(x,t,\lambda). \qquad (30)$$

Тогда коэффициенты A_1, B_1 и W_1 нового представления можно записать в следующем виде:

$$K_1 = \frac{1}{D}\left(k\alpha^2 + \alpha A - \alpha_x\right),$$

$$A_1 = D + \gamma\left(k\gamma - 2k\alpha + \frac{D_x}{D}\right), \quad B_1 = 2k\gamma - 2k\alpha + \frac{D_x}{D},$$

$$W_1 = \frac{1}{2k^2 D}\left(W_{xx} + 2k\alpha W_x - k\alpha_t + 2k\left(k\alpha^2 + A\right)W\right). \qquad (31)$$

Для того чтобы коэффициенты A_1 и W_1 оставались полиномами по λ, а K_1 – равной постоянной k, достаточно потребовать независимости $D(x,t)$ от λ и выполнения условия: $\beta = k^{-1}\left(\alpha_x - A + k\alpha(\gamma - \alpha)\right)$, которое эквивалентно условию: $K_1(x,t) = k$. Условие $B_1 = 0$ выполняется, если потребовать: $\gamma = \alpha - D_x/(2kD)$. В результате имеем: $D = k^{-1}\left(kU^2 + A - U_x\right)$. Зависимость D от λ определяется зависимостью коэффициента A исходного представления от того же параметра в соответствии с табл. 1. Если зависимость коэффициентов A_1 и W_1 от λ такая же, как и у коэффициентов A и W, то соответствующее преобразование будет являться автопреобразованием Бэклунда. В частности, это условие выполняется для системы 7 из табл. 2. Учитывая, что в этом случае $D = km^2 + m_x + \eta$, функции $M(x,t)$ и $E(x,t)$ нового представления с $A_1 = M + \lambda E, W_1 = M + \lambda/(2k)$ будут иметь следующий вид:

$$M = \frac{D_x}{kD} + m,$$

$$E = \frac{1}{4kD^2}(2DD_{xx} - 3\left(D_x\right)^2 - 4kmDD_x - 4kD^2\left(km^2 - D - m_x\right)).$$

Очевидно, что данное преобразование можно повторять многократно.

Если зависимость A_1 и W_1 от λ будет отличаться от аналогичной зависимости A и W исходного представления, то новое представление будет определять некоторый другой тип уравнений, а преобразование $T \to \Theta$ будет генерировать преобразование Бэклунда между исходной системой и новой. В частности, уравнение КдВ под номером 2 в табл. 2 преобразуется с помощью рационального преобразования $T \to \Theta$ в систему под номером 4. При этом:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{ks}} \frac{w_x}{w}, \; v = 2sW_1 - 3su^2,$$

$$W_1 = w + \frac{1}{4\sqrt{ks}} \frac{w_{xx}}{w},$$

где $w(x,t)$ – решение уравнения КдВ (под номером 2 в табл. 2).

Заключение

В работе найдено новое универсальное представление нелинейных уравнений типа КдВ волновой динамики в форме условия совместности двух уравнений первого порядка с квадратичной нелинейностью, эквивалентное представлению Лакса. Представлен список примеров, интегрируемых с помощью МОЗ уравнений, содержащий и новые уравнения типа КдВ. Представлен общий вид законов сохранения для всех типов уравнений и для некоторых указан их явный вид. Для всех типов уравнений указана общая форма рационального преобразования вспомогательной функции, позволяющая получать преобразования Бэклунда этих уравнений.

Список литературы

1. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М. : Наука, 1980. 319 с.
2. Lamb G. R. Becklund transformations at the turn of century // Lecture Notes in Mathematics / ed. Miura R. M. Springer, 1976. С. 515.
3. Лэм Дж. Л. Ведение в теорию солитонов. М. : Мир, 1983. 294 с.
4. Солитоны / под ред. Р. Буллафа, Ф. М. Кодри. М. : Мир, 1983. 408 с.
5. Журавлев В. М. Модели нелинейных волновых процессов, допускающие солитонные решения // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1996. Т. 100, № 6. С. 2243–2263.
6. Журавлев В. М. Нелинейные волны в многокомпонентных системах с дисперсией и диффузией. Ульяновск : Изд-во УлГУ, 2001. 252 с.
7. Журавлев В. М. Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений // Теоретическая и математическая физика. 2009. Т. 158, № 1. С. 58–71.
8. Журавлев В. М. Нелинейные интегрируемые модели физических процессов. Метод функциональных подстановок. Ульяновск : Изд-во УлГУ, 2020. 182 с.
9. Бурцев С. П., Захаров В. Е., Михайлов А. В. Метод обратной задачи с переменным спектральным параметром // Теоретическая и математическая физика. 1987. Т. 70, № 3. С. 323–341.
10. Лакс П. Д. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны // Математика. 1969. Т. 13, № 5. С. 128–150.
11. Свинолупов С. И., Соколов В. В. Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения // Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16, № 61. С. 86–87.

12. Sokolov V. V., Shabat A. B. Classification of integrable evolution equations // Mathematical physics reviews. 1984. Vol. 4. P. 221–280.

References

1. Zakharov V.E., Manakov S.V., Novikov S.P., Pitaevskiy L.P. *Teoriya solitonov: metod obratnoy zadachi = Soliton theory: inverse problem method*. Moscow: Nauka, 1980:319. (In Russ.)
2. Lamb G.R. Becklund transformations at the turn of century. *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1976:515.
3. Lem Dzh.L. *Vedenie v teoriyu solitonov = Introduction to the theory of solitons*. Moscow: Mir, 1983:294. (In Russ.)
4. Bullafa R., Kodri F.M. (eds.). *Solitony = Solitons*. Moscow: Mir, 1983:408. (In Russ.)
5. Zhuravlev V.M. Models of nonlinear wave processes allowing solitonic solutions. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki = Journal of experimental and theoretical physics*. 1996;100(6):2243–2263. (In Russ.)
6. Zhuravlev V.M. *Nelineynye volny v mnogokomponentnykh sistemakh s dispersiey i diffuziey = Nonlinear waves in multicomponent systems with dispersion and diffusion*. Ulyanovsk: Izd-vo UlGU, 2001:252. (In Russ.)
7. Zhuravlev V.M. The Cole-Hopf generalized substitution method and new examples of linearizable nonlinear evolution equations. *Teoreticheskaya i mate-maticheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics*. 2009;158(1):58–71. (In Russ.)
8. Zhuravlev V.M. *Nelineynye integriruemye modeli fizicheskikh protsessov. Metod funktsional'nykh podstanovok = Nonlinear integrable models of physical processes. Functional substitution method*. Ulyanovsk: Izd-vo UlGU, 2020:182. (In Russ.)
9. Burtsev S.P., Zakharov V.E., Mikhaylov A.V. Inverse problem method with variable spectral parameter. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics*. 1987;70(3):323–341. (In Russ.)
10. Laks P.D. Integrals of nonlinear evolutionary equations and solitary waves. *Matematika = Mathematics*. 1969;13(5):128–150. (In Russ.)
11. Svinolupov S.I., Sokolov V.V. Evolution equations with nontrivial conservation laws. *Funktsional'nyy analiz i ego prilozheniya = Functional analysis and its applications*. 1982;16(61):86–87. (In Russ.)
12. Sokolov V.V., Shabat A.B. Classification of integrable evolution equations. *Mathematical physics reviews*. 1984;4:221–280.

Информация об авторах / Information about the authors

Виктор Михайлович Журавлев
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Самарский национальный исследовательский университет (Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34); профессор кафедры теоретической физики, Ульяновский государственный университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42)

Viktor M. Zhuravlev
Doctor of physical and mathematical sciences, leading researcher, Samara National Research University (34 Moskovskoye highway, Samara, Russia); professor of the sub-department of theoretical physics, Ulyanovsk State University (42 Lva Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Виталий Михайлович Морозов
младший научный сотрудник, Самарский национальный исследовательский университет (Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34)

Vitaliy M. Morozov
Junior researcher, Samara National Research University (34 Moskovskoye highway, Samara, Russia)

E-mail: aieler@rambler.ru

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 08.11.2021

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 25.11.2021

Принята к публикации / Accepted 05.12.2021