

МНОГОЗНАЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ И ГИДРОДИНАМИКА¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Основной целью работы является построение нового класса решений двумерного уравнения диффузии (теплопроводности), представляющих собой многозначные функции. Новые решения связываются с квазилинейными уравнениями первого порядка, которые имеют гидродинамическую аналогию в классе течений идеальной жидкости. Сравняется классическая гидродинамическая аналогия диффузионного процесса с течением вязкой жидкости и новая аналогия с течением идеальной жидкости. Рассматривается общая роль точек ветвления в идентификации многозначных решений.

Материалы и методы. Методом исследования является анализ решений уравнений диффузии, записанных в координатах на комплексной плоскости.

Результаты. Найдены общие формулы вычисления точных многозначных решений двумерного уравнения диффузии на основе их связи с квазилинейными уравнениями первого порядка. Установлена новая гидродинамическая аналогия этих решений с течениями идеальной жидкости на плоскости. Приведены конкретные примеры решений для нескольких важных с практической точки зрения задач.

Выводы. С помощью развитого в работе метода показано, что уравнения диффузии (теплопроводности) имеют в качестве решений многозначные функции, число листов которых определяется начальными условиями. Развитый метод дает новый подход к построению решений уравнений диффузии как классических, так и в классе многозначных функций.

Ключевые слова: двумерные уравнения диффузии и теплопроводности, гидродинамическая аналогия, квазилинейные уравнения первого порядка, многозначные решения.

MULTIPLE SOLUTIONS OF DIFFUSION EQUATIONS AND HYDRODYNAMICS

Abstract.

Background. The main goal of the paper is to construct a new class of solutions of the two-dimensional diffusion equation (heat conductivity), which are multivalued functions. New solutions are associated with quasilinear first-order equations that have a hydrodynamic analogy in the class of flows of an ideal fluid.

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (в рамках Государственного задания и проекта № 3.2111.2017/4.6), а также при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках проектов 16-42-732119 р_офи_м и 16-42-732113 р_офи_м.
© 2018 Журавлев В. М., Морозов В. М. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

We compare the classical hydrodynamic analogy of the diffusion process with the flow of a viscous fluid and a new analogy with the flow of an ideal fluid. The general role of branch points in the identification of uniquely determined solutions is considered. New solutions of diffusion equations are constructed.

Materials and methods. The method of investigation is the analysis of solutions of the diffusion equations written in coordinates on the complex plane.

Results. We found general formulas for calculating the exact multivalued solutions of the two-dimensional diffusion equation based on their connection with quasilinear first-order equations. A new hydrodynamic analogy of these solutions is established with the flows of an ideal liquid in the plane. Specific examples of solutions for several important practical problems are given.

Conclusions. Developed in this paper, it is shown that the diffusion (thermal conductivity) equations have many-valued functions as solutions, the number of sheets of which is determined by the initial conditions. The developed method gives a new approach to the constancy of the solutions of the diffusion equations both classical and in the class of multivalued functions.

Key words: Two-dimensional equations of diffusion and heat conduction, hydrodynamic analogy, first-order quasilinear equations, multivalued solutions

Введение

Основным уравнением теории диффузии (теплопереноса) в линейной среде является уравнение

$$\hat{L}\Psi - J(x, t) = 0, \quad (1)$$

где \hat{L} – линейный параболический оператор:

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - D(t)\Delta, \quad (2)$$

$D(t)$ – коэффициент диффузии (возможно, зависящий от времени); $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ – декартовы пространственные координаты; t – время.

В качестве источника $J(x, t)$ будем рассматривать линейную функцию по переменной Ψ : $J = U(x, t)\Psi(x, t)$. Сама функция $\Psi(x, t)$, в зависимости от характера процесса, может быть концентрацией элементов среды или ее температурой. В данной статье будет рассматриваться в основном случай пространственной размерности $d = 2$. Процесс диффузии в линейной среде можно в целом представить как процесс «выравнивания» неравномерного распределения концентрации в пространстве некоторой диффундирующей примеси (или температуры). Именно такой характер диффузионных процессов считается классическим.

С другой стороны, известным фактом является то, что уравнения параболического типа (1) связаны с гидродинамическими уравнениями потенциального потока вязкой жидкости. Это легко показать, если ввести функцию $\Phi = \ln\Psi$, которая играет роль потенциала вязкого гидродинамического течения. Уравнение (1) можно записать в виде уравнения относительно функции Φ :

$$\Phi_t = D(t)\Delta\Phi + D(t)\left((\Phi_x)^2 + (\Phi_y)^2\right) + U(x, t). \quad (3)$$

Рассмотрим градиентное векторное поле $u = -2D(t)\nabla\Phi = (u_x, u_y)$. Тогда, вычисляя компоненты градиента от обеих сторон уравнения (3), приходим к следующему уравнению для $u(x, y, t)$:

$$u_t + (u, \nabla)u = 2D(t)\Delta u - F, \quad (4)$$

где

$$F = 2D(t)\nabla U + 2\frac{d\ln D}{dt}u.$$

Уравнение (4) в точности совпадает с уравнениями вязкого потенциального течения жидкости в поле объемных сил F с коэффициентом кинематической вязкости $2D(t)$. Этот факт переносится на уравнения (1) в произвольной координатной размерности. Таким образом, формально с диффузионным потоком в линейной среде всегда можно связать некоторый гидродинамический поток, который в некотором смысле можно рассматривать как суть процесса переноса диффундирующей примеси. Наличие гидродинамической аналогии в процессе диффузии указывает на возможность существования в диффузионном потоке таких структур, которые характерны именно для гидродинамики, например, наличие особенностей в форме опрокидывающихся волновых фронтов или многозначных решений, которые в гидродинамике обычно интерпретируют как ударные волны. Указанием на такую возможность является нелинейность уравнений Навье – Стокса (4), хотя само исходное уравнение диффузии является линейным. При этом обычно считалось, что именно диффузионные процессы предотвращают образование ударных волн в среде.

Ранее в работах [1, 2] было показано, что многозначные решения являются характерным элементом линейных процессов, которые описываются линейными уравнениями гиперболического и эллиптического типа. Этот факт опирается на доказательство того, что уравнения Д'Аламбера и Лапласа в координатной размерности большей 1 связаны с системами квазилинейных уравнений первого порядка, которые тесно связаны с гидродинамическими потоками. Отсюда можно сделать вывод, что раз диффузионные процессы также связаны с гидродинамическими потоками, то и для параболических уравнений (1) возможны классы решений, обнаруживающие сложное поведение, аналогичное образованию опрокидывающихся фронтов и многозначных решений. Факт наличия таких решений для параболических уравнений в координатной размерности 2 был обнаружен в [3].

В настоящей работе приводятся результаты исследований многозначных решений уравнения (1) с потенциалами достаточно общего вида и, в частности, для простого уравнения диффузии без источников в координатной размерности $d = 2$. Мы покажем, что такие решения также связаны с квазилинейными уравнениями первого порядка и, фактически, связаны с гидродинамическими потоками на плоскости, которые не являются вязкими. Именно это и приводит к возможности опрокидывания волновых фронтов в процессе диффузии. Это явление указывает на возможность возникновения сложных динамических процессов даже в линейной диффузионной среде.

В заключении данной работы мы покажем, что аналогичное сложное поведение возможно и для физических объектов, которые описываются параболическими уравнениями с мнимым временем. К таким объектам относятся нестационарные квантовые состояния и оптическое излучение в однородной и неоднородной средах определенного типа.

1. Уравнения в комплексных координатах и гидродинамика

В записи оператора \hat{L} и уравнения (1) перейдем к комплексным координатам $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$. В этом случае уравнение (1) будет иметь такой вид:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} - 4D(t) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \bar{z}} = U(z, \bar{z}, t) \Psi. \quad (5)$$

Поскольку это уравнение является линейным, то его общее решение может быть построено с помощью суперпозиции частных решений, отвечающих определенным дополнительным условиям. В качестве частных решений уравнения (5) рассмотрим функции $\Psi(x, z)$ следующего вида:

$$\Psi(x, t) = A(z, t) e^{\bar{z}v(z, t)}, \quad (6)$$

где $A(z, t)$ и $v(z, t)$ – две вспомогательные функции, являющиеся аналитическими функциями комплексной переменной $z = x + iy$. Эти решения являются комплексными, однако вещественная или мнимая часть этих частных решений является также решением этого уравнения. Поэтому из частных решений этого типа можно затем сконструировать и общее вещественное решение исходного уравнения.

Подставляя функцию Ψ в уравнение (5), приходим к условию обращения его в тождество, которое эквивалентно уравнениям для функций $A(z, t)$, $v(z, t)$ и $U(z, \bar{z}, t)$:

$$\begin{aligned} U &= M(z, t)\bar{z} + N(z, t), \\ v_t - 4D(t)vv_z - M(z, t) &= 0, \\ A_t - \frac{\partial}{\partial z}(4D(t)Av) - N(z, t)A &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Представим функцию A в виде произведения: $A = QL$, где функция Q удовлетворяет уравнению

$$Q_t - \frac{\partial}{\partial z}(4D(t)Qv) = 0. \quad (8)$$

Тогда последнее уравнение в (7) эквивалентно уравнению относительно $\Theta = \ln L$ следующего вида:

$$\Theta_t - 4D(t)v\Theta_z = N(z, t). \quad (9)$$

Поскольку уравнение (8) представляет собой дифференциальный закон сохранения, существует функция $S(z, t)$ такая, что

$$Q = \frac{\partial S}{\partial z}, \quad 4D(t)Qv = \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (10)$$

Сама функция $S(z, t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t} - 4D(t)v \frac{\partial S}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, система квазилинейных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} v_t - 4D(t)vv_z - M(z, t) &= 0, \\ \Theta_t - 4D(t)v\Theta_z &= N(z, t), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} - 4D(t)v \frac{\partial S}{\partial z} = 0,$$

где $\Theta = \ln L$, эквивалентна исходному уравнению диффузии. Решение этой системы может быть построено с помощью метода характеристик, который позволяет строить частные решения исходного уравнения (5). Результаты применения этого метода к системе (12) будут рассмотрены далее, но прежде рассмотрим связь комплексных решений (6) с гидродинамическими течениями.

2. Гидродинамическая аналогия

Гидродинамический смысл функции $v(z, t)$, участвующей в записи решения (6), вытекает из следующего тождества:

$$V = u_x + iu_y = -2D \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = -D \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = -2D(t)v(z, t), \quad (13)$$

где $\Phi = \ln \Psi = \ln A + v(z, t)\bar{z}$.

Таким образом, аналитическая функция $V(z, t) = -2D(t)v(z, t)$ в представленном типе решений – это комплексная скорость гидродинамического потока, сопровождающего процесс диффузии. В связи с этим первое уравнение системы (12) можно интерпретировать как уравнение гидродинамического течения, записанного в комплексной форме. Умножая это уравнение на коэффициент $-8D(t)$ и раскладывая результат на мнимую и вещественную части, приходим к паре уравнений Эйлера (без вязкости) для компонент комплексной скорости $W = 8D(t)v(z, t) = w_x + iw_y$ с вектором скорости потока $W = (w_x, w_y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= F_x, \\ \frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} &= F_y, \end{aligned} \quad (14)$$

где F_x и F_y – компоненты объемной силы:

$$F(z, t) = -8D(t)M(z, t) + 8 \frac{d \ln D}{dt} v(z, t) = F_x + iF_y.$$

При выводе этих уравнений использовались условия Коши – Римана для аналитической функции $w(z, t)$:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = \frac{\partial w_y}{\partial y}, \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{\partial w_y}{\partial x}.$$

Таким образом, решения типа (6) связаны с невязким потоком жидкости. Более того, в отличие от поля u с компонентами u_x, u_y , данный поток является непотенциальным, сжимаемым и завихренным. Действительно, из условия Коши – Римана следует, что либо

$$w_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, w_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0,$$

либо

$$w_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, w_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

В результате имеем

$$\operatorname{div} W = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \neq 0,$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \neq 0.$$

Рассмотрим теперь для простоты случай $D = \text{const}$ и представим функцию $16DN(z, t)$ в виде производной по z от функции $\Pi(z, t) = -p(x, y, t) - iq(x, y, t)$:

$$F(z) = \frac{1}{2} \frac{d\Pi}{dz} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (p + iq) = -\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (15)$$

Тогда система уравнений примет такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= -p_x, \\ \frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} &= p_y, \end{aligned} \quad (16)$$

где функция p удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta p = 0.$$

Объемная сила $F = (-p_x, p_y)$ имеет нестандартный вид, что затрудняет использование полученной гидродинамической аналогии в прикладных гид-

родинамических задачах. Однако, учитывая то, что объемная сила такого типа соответствует именно диффузионному процессу, связанному с (6), можно сказать, что диффузию порождает объемная удельная сила специфического вида $F = (-p_x, p_y)$ (15). При этом вещественная суперпозиция решений типа (6), например вещественная часть такого решения, будет связана с вязким потоком, удовлетворяющим уравнениям (4). Вместе с тем, имеются и простые варианты выбора объемных сил, которые могут быть связаны непосредственно с гидродинамикой реальной жидкости в поле реальных объемных сил. Таким простым вариантом выбора функции p является линейная функция координат: $p = a(t)x + b(t)y + c(t)$. В этом случае объемную силу F можно интерпретировать как удельную силу тяжести в однородном поле тяготения:

$$F = \frac{1}{\rho} f(-a(t), b(t)), \quad (17)$$

где ρ – плотность сжимаемой среды.

Единственным недостатком рассматриваемой гидродинамической аналогии является отсутствие в ней уравнения сохранения массы или уравнения неразрывности. Этот недостаток можно восполнить, воспользовавшись уравнением (8). Поскольку функция $Q(z, t)$ зависит только от z , то комплексно-сопряженная ей функция $Q^* = (Q(z, t))^* = Q^*(z^*, t)$ зависит только от z^* . Учитывая это и умножив уравнение (8) на Q^* , приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} |Q|^2 - \frac{\partial}{\partial z} (4Dv |Q|^2) = 0.$$

Вычисляя вещественную часть этого соотношения, приходим к уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial t} |Q|^2 + \frac{\partial}{\partial x} (|Q|^2 w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (|Q|^2 w_y) = 0, \quad (18)$$

что позволяет функцию $\rho = |Q|^2$ интерпретировать как плотность сжимаемой среды. Вычисляя мнимую часть этого соотношения, получаем следующее соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial y} (|Q|^2 w_x) = \frac{\partial}{\partial x} (|Q|^2 w_y),$$

что эквивалентно существованию функции χ такой, что выполнены равенства:

$$w_x = \frac{1}{|Q|^2} \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad w_y = \frac{1}{|Q|^2} \frac{\partial \chi}{\partial y},$$

которые дают представление о структуре гидродинамического потока с полем скорости W .

Наличие гидродинамической аналогии в форме уравнений идеальной жидкости указывает на то, что решения типа (6) могут быть многозначными,

поскольку гидродинамика идеальной жидкости допускает решения в форме опрокидывающихся волн, которые описываются многозначными функциями. Это означает, что такие же многозначные решения имеются и у исходного линейного уравнения диффузии, что, вообще говоря, является важным новым фактом. Построение и исследование таких решений и является дальнейшей нашей задачей.

3. Решение уравнений на характеристиках

Общим способом построения решений системы уравнений (12) является метод характеристик [4]. В отличие от классического метода характеристик, воспользуемся методом комплексных характеристик. Введем переменную $\tau(t) = 4 \int D(t) dt$. Тогда уравнение характеристик системы (12) будет иметь следующий вид:

$$\frac{dz}{d\tau} = -v. \quad (19)$$

Если разложить последнее уравнение на мнимую и вещественную части, то получим пару вещественных характеристик для двумерного течения с компонентами (v_x, v_y) . Поэтому решение задач в форме комплексных уравнений упрощает выкладки, не меняя сути вычислений с вещественными характеристиками. На характеристиках (19) уравнения для функций v, S и Θ примут такой вид:

$$\frac{dv}{d\tau} = m(z, \tau), \quad \frac{d\Theta}{d\tau} = n(z, \tau), \quad \frac{dS}{d\tau} = 0, \quad (20)$$

где $m(z, \tau) = M(z, t) / 4D(t), n(z, \tau) = N(z, t) / 4D(t)$.

Подставляя v и (19) в первое уравнение системы (20), получаем уравнение характеристик в замкнутой относительно z форме:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = -m(z, \tau). \quad (21)$$

Согласно общей теории метода характеристик, если найдены оба интеграла движения $I_1(v, z, \tau)$ и $I_2(v, z, \tau)$ системы уравнений (19) и (20) и, соответственно, (21), то общее решение системы (12) и первого уравнения (20) относительно v находится из алгебраического уравнения

$$H(I_1(v, z, \tau), I_2(v, z, \tau)) = 0, \quad (22)$$

где $H(I_1, I_2)$ – произвольная комплексная функция своих аргументов. Это же уравнение без ограничения общности можно записать в одной из следующих форм:

$$I_1 = h_1(I_2) \quad (23)$$

либо

$$I_2 = h_2(I_1), \quad (24)$$

где функции $h_1(I)$ и $h_2(I)$ взаимно обратны.

При этом решение для S представляет собой произвольную функцию от интегралов движения: $S = S(I_1(v, z, \tau), I_2(v, z, \tau))$, а решение для $L(z, \tau)$ можно записать в следующей форме:

$$L = J(I_1, I_2) e^{\int n(z, \tau) d\tau},$$

где $J(I_1, I_2)$ – произвольная функция интегралов движения, а интеграл в показателе экспоненты берется по характеристикам C . В результате решение для $Q(z, \tau)$ можно записать в виде

$$A(z, \tau) = L \frac{\partial S}{\partial z} = e^{\int n(z, \tau) d\tau} J(I_1, I_2) \frac{\partial S(I_1, I_2)}{\partial z}. \quad (25)$$

В силу произвольности функции $S(I_1, I_2)$ и возможности представить (22) в виде (23)–(24) наличие множителя $J(I_1, I_2)$ несущественно. Поэтому в дальнейшем мы его опускаем. Окончательно согласно (6) общее решение уравнения (5) для потенциала вида (7) можно записать в виде

$$\Psi(z, \bar{z}, \tau | H) = e^{\bar{z}v(z, \tau)} e^{\int n(z, \tau) d\tau} \frac{\partial S(I_1, I_2)}{\partial z}. \quad (26)$$

Функция $S = S(I_1, I_2)$ должна определяться из заданных начальных и граничных условий.

Кроме произвола в выборе функции $S(I_1, I_2)$, существует произвол в выборе функции $H(I_1, I_2)$ в уравнении (22), который также не меняет форму потенциала $U(z, \bar{z}, \tau)$. Этот дополнительный произвол можно назвать топологическим вырождением решений рассматриваемого типа. Таким образом, полное решение, учитывающее топологическое вырождение, можно записать в виде

$$\Psi = \sum_H C_H \Psi(z, \bar{z}, \tau | H), \quad (27)$$

где сумма берется по всем неэквивалентным функциям $H(I_1, I_2)$ и всем решениям уравнения (22) с произвольными постоянными коэффициентами C_H .

4. Решения для вещественного источника

В качестве примера рассмотрим важный, с точки зрения приложений, случай, когда потенциал U , определенный в (7), является вещественным. Условие вещественности U в случае вещественности $D(t)$ сводится к двум соотношениям:

$$m(z, \tau) = a(\tau)z + b(\tau), \quad n(\zeta, \tau) = \bar{b}(\tau)z + c(\tau), \quad (28)$$

где $a(\tau)$ и $c(\tau)$ – произвольные вещественные функции, а $b(\tau), \bar{b}(\tau)$ – комплексные, но взаимно сопряженные друг другу функции. В этом случае имеем

$$U(z, \bar{z}, \tau) = 4D(\tau)(a(\tau)|z|^2 + b(\tau)\bar{z} + \bar{b}(\tau)z + c(\tau)). \quad (29)$$

Отметим, что эта общая форма потенциала связана с несколькими существенно различающимися по практической реализации системами. В случае $a(\tau) = 0$ имеем линейно меняющийся в плоскости $(x - y)$ потенциал, а при дополнительном условии $b(\tau) = 0$ потенциал, постоянный в плоскости $(x - y)$.

В рассматриваемом случае уравнения (20) с учетом (28) превращаются в линейные уравнения на характеристиках:

$$\frac{dv}{d\tau} = a(\tau)z + b(\tau), \quad \frac{dL}{d\tau} = \bar{b}(\tau)z + c(\tau), \quad \frac{dS}{d\tau} = 0. \quad (30)$$

Уравнение характеристик (21) теперь будет иметь вид

$$\frac{d^2z}{ds^2} + a(\tau)z = -b(\tau). \quad (31)$$

Пусть $Z_1(\tau), Z_2(\tau)$ являются парой линейно независимых решений однородной части уравнения (31), а $Z_0(\tau)$ – некоторым решением неоднородного уравнения. Тогда общее решение для z и v на характеристике можно формально записать в виде

$$z(\tau) = I_1 Z_1(\tau) + I_2 Z_2(\tau) + Z_0(\tau), \quad (32)$$

$$v(\tau) = -I_1 \dot{Z}_1(\tau) - I_2 \dot{Z}_2(\tau) - \dot{Z}_0(\tau).$$

Постоянные интегрирования I_1 и I_2 являются интегралами движения. Решая последнюю систему уравнений (32) как систему алгебраических уравнений относительно I_1 и I_2 , находим

$$I_1 = \frac{1}{K}(\xi \dot{Z}_2 + \eta Z_2), \quad I_2 = -\frac{1}{K}(\xi \dot{Z}_1 + \eta Z_1), \quad (33)$$

где $K = Z_1 \dot{Z}_2 - Z_2 \dot{Z}_1 = \text{const}$ и $\xi = z - Z_0, \eta = v + \dot{Z}_0$.

Эти выражения для интегралов движения I_1 и I_2 после подстановки в решения (22), (25) и (26) дают в результате полное решение уравнения (5) для случая квадратичного потенциала (29).

5. Классические решения

Рассмотрим по отдельности три основных варианта общего вида квадратичного потенциала (29). Наиболее простой вариант соответствует условию $a(\tau) = b(\tau) = 0$, который эквивалентен однородному по пространству коэффициенту при Ψ в источнике. В результате уравнение для характеристик принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = 0, \quad (34)$$

отсюда

$$z = I_1 \tau + I_2. \quad (35)$$

Множество характеристик, описываемых этим уравнением, представляет собой множество прямых линий, заданных в параметрической форме (в предположении вещественности s):

$$x(\tau) = \operatorname{Re}[I_1] \tau + \operatorname{Re}[I_2], \quad y(\tau) = \operatorname{Im}[I_1] \tau + \operatorname{Im}[I_2].$$

Соответствующие интегралы движения имеют вид

$$I_1 = -v, \quad I_2 = z + v\tau. \quad (36)$$

Простейшее «классическое» решение для функции Ψ соответствует выбору функции $H(I, J)$ в следующем виде:

$$H(I_1, I_2) = I_2 = z + v\tau = 0.$$

Отсюда $v = -z/\tau$. Характеристики (35) в этом случае – это прямые, выходящие из начала координат при $\tau = 0$ и больше нигде не пересекающиеся. Соответствующее общее решение для Ψ (26) теперь выглядит так:

$$\Psi = \frac{1}{\tau} e^{-|\xi|^2/\tau} e^{C \int \dot{\xi} \tau d\tau} A(z/\tau), \quad (37)$$

где

$$A(z/\tau) = \left[J(-v, 0) \frac{\partial}{\partial v} S(-v, 0) \right]_{v=-z/\tau}.$$

Решение (37) представляет собой классическое решение двумерного уравнения диффузии, записанное в комплексной форме. Вещественная часть этого решения, а также любая линейная суперпозиция этих решений является решением того же исходного уравнения.

6. Многолистные решения

Неклассические многозначные (многолистные) решения исходного уравнения в случае постоянного потенциала связаны с многозначными решениями уравнения (22). Эти решения можно записать в двух эквивалентных формах, которые удобно использовать в отдельных вариантах представления решений. Вариант уравнения для $v(z, t)$ (24), обозначаемый в дальнейшем как (II), можно представить в следующем виде:

$$z + v\tau = h_2(v), \quad (38)$$

где функция $h_2(v)$ определяется начальным условием: $z = h_2(v(z, 0))$. Соответствующее решение (26) для Ψ примет такой вид:

$$\Psi = e^{\bar{z}v(z,t)} e^{\int c(\tau)d\tau} B(v)v_z, \quad (39)$$

где

$$B(v) = \frac{\partial}{\partial v} W(-v, h_2(v)). \quad (40)$$

Простейшее многозначное (двулистное) решение соответствует выбору функции $h_2(v)$ в виде

$$h_2(v) = a_2 v^2 + b_2 v + c_2, \quad (41)$$

где $a, b, c = \text{const}$ – некоторые комплексные постоянные. В этом случае имеем два решения уравнения (38):

$$\begin{aligned} v_{\pm}(z, \tau) &= \frac{1}{2a_2} (\tau - b_2 \pm \sqrt{(\tau - b_2)^2 + 4a_2 z - 4a_2 c_2}) = \\ &= f_2(\tau) \pm \frac{1}{2a_2} p_2(z, \tau), \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$p_2 = \sqrt{(\tau - b_2)^2 + 4a_2 z - 4a_2 c_2}, f_2(\tau) = \frac{1}{2a_2} (\tau - b_2).$$

Каждое из этих решений порождает свое решение (39) :

$$\Psi_{\pm} = \mp \frac{B_{\pm}(v_{\pm})}{p_2(z, \tau)} e^{\bar{z}(f_2(\tau) \pm p_2(z, \tau)/(2a_2))} e^{\int c(\tau)d\tau}. \quad (43)$$

Асимптотическое поведение этого решения при $|z| \rightarrow \infty$ определяется показателем экспоненты. При $|z| \rightarrow \infty$ имеем

$$\bar{z}v_{\pm}(z, \tau) \rightarrow \pm \frac{1}{\sqrt{a_2}} \bar{z}z^{1/2} = \pm \frac{i}{\sqrt{a_2}} |z|^{3/2} e^{-i \arg z / 2}. \quad (44)$$

Отсюда следует, что основной вещественный множитель, управляющий асимптотикой решения, ведет себя при $|z| \rightarrow \infty$ так:

$$\Psi \sim e^{\pm \frac{1}{\sqrt{a_2}} |z|^{3/2} \sin(\arg z / 2)}. \quad (45)$$

Эта асимптотика показывает, что функция Ψ убывает к нулю только в отдельных секторах плоскости $(x - y)$, где знак показателя отрицателен. При этом в том секторе, где решение на одном листе убывает к нулю, на другом неограниченно растет и наоборот. Общее решение можно представить в виде суперпозиции:

$$\Psi = \int_V \frac{e^{\bar{z}f_2(\tau)}}{p_2(z, \tau)} F(v_+, v_-, a_1, b_1, c_1, z, \tau) da_1 db_1 dc_1, \quad (46)$$

где интеграл по параметрам a_1, b_1, c_1 берется по некоторой заданной области V из допустимых значений и введены обозначения:

$$F(v_+, v_-, a_1, b_1, c_1, z, \tau) = B_-(v_-) e^{-\Theta_2(z, \tau) + \int_{C_-} c(\tau) d\tau} - B_+(v_+) e^{\Theta_2(z, \tau) + \int_{C_+} c(\tau) d\tau}.$$

Функции $B_{\pm}(v_{\pm})$ произвольны и связаны с функциями $W_{\pm}(I_1, I_2)$ соотношениями (40), функции v_{\pm} соответствуют решениям (42), а функция $\Theta(z, \tau)$ определена соотношением

$$\Theta_2(z, \tau) = \frac{\bar{z} p_2(z, \tau)}{2a_2}.$$

Кроме этого, C_{\pm} – характеристики, соответствующие отдельным листам решений v_{\pm} .

Второй вариант двулистного решения (23), обозначаемый в дальнейшем как (I), имеет такой вид:

$$v = h_1(z + v\tau). \tag{47}$$

Формально такая форма решения демонстрирует другое асимптотическое поведение. Полагая

$$h_1(\zeta) = a_1 \zeta^2 + b_1 \zeta + c_1, \zeta = z + v\tau, \tag{48}$$

приходим к следующему варианту двулистного решения:

$$\zeta = a_1 \tau \zeta^2 + b_1 \tau \zeta + c_1 \tau + z,$$

отсюда

$$v_{\pm} = -\frac{z}{\tau} + f_1(\tau) \pm \frac{1}{2a_1 \tau} p_1(z, \tau), \tag{49}$$

здесь

$$p_1 = \sqrt{(1 - b_1 \tau)^2 - 4a_1(c_1 \tau + z)}, \quad f_1(\tau) = \frac{1}{2a_1 \tau} (1 - b_1 \tau).$$

Теперь решение для Ψ выглядит так:

$$\Psi_{\pm} = -\frac{1}{\tau} e^{-|z|^2/\tau} e^{\bar{z}(f_1(\tau) \pm p_1(z, \tau)/(2a_1 \tau))} e^{\int_{C} c(\tau) d\tau} B(v_{\pm}) \left(1 \pm \frac{1}{p_1(z, \tau)} \right). \tag{50}$$

При $|z| \rightarrow \infty$: $p_1(z) \rightarrow 2\sqrt{-a_1} z^{1/2}$. Поэтому основной множитель в выражении для Ψ будет иметь вид

$$\Psi \sim e^{-\frac{1}{\tau}|z|^2 \pm \frac{1}{\sqrt{a_1}}|z|^{3/2} \sin(\arg z/2)}.$$

Теперь асимптотика решения такова, что оба листа удовлетворяют граничному условию $\Psi \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$. Общее решение можно представить в виде суперпозиции:

$$\Psi = -\frac{1}{\tau} e^{\bar{z}f_1(\tau)} e^{-|z|^2/\tau} \left(e^{\Theta_1 + \int_{C_+} c(\tau) d\tau} B_+(v_+, z, \tau) + e^{-\Theta_1 + \int_{C_-} c(\tau) d\tau} B_+(v_+, z, \tau) \right),$$

где введены обозначения:

$$B_{\pm}(v_{\pm}, z, \tau) = \left(1 \pm \frac{1}{p_1(z, \tau)} \right) \frac{\partial}{\partial v} W(-v, h_1(v)), \Theta_1 = \frac{\bar{z}p_1(z, \tau)}{2a_1(\tau)}.$$

Двулистные решения являются частным случаем многолистных решений, которым соответствует выбор функций $h_1(z + v\tau)$ или $h_2(v)$, для которых уравнения (23)–(24) имеют число корней относительно v больше 2. Примером случая с конечным числом листов является выбор $h_1(z + v\tau)$ или $h_2(v)$ в виде полинома конечной степени. Анализировать такие решения в аналитическом виде сложно, поскольку решения алгебраических уравнений степени выше 4 не выражаются, как известно, в радикалах. Однако для описания общего поведения таких решений полезно ввести в рассмотрение динамику точек ветвления многолистных решений.

7. Признак многозначности решения

Общую задачу, для решения которой необходимо привлекать информацию о точках ветвления, можно сформулировать следующим образом: «Как по виду начального распределения функции $\Psi(z, z, \tau)$ времени можно установить, является ли решение многолистным и сколько листов должно решение иметь для точного соответствия начальным и граничным условиям?».

Поскольку речь идет о линейных уравнениях, то согласно теореме о существовании и единственности их решений при заданных классическим образом граничных и начальных условиях решения можно единственным образом представить в виде линейной суперпозиции частных решений данной краевой задачи, если они образуют полную систему базисных функций в соответствующем гильбертовом пространстве. Следовательно, все многозначные решения, которые получаются с помощью развитого метода, могут быть представлены в форме такой суперпозиции частных решений. Вместе с тем, как было показано в предыдущем разделе, классические решения уравнения диффузии с постоянными коэффициентами в рамках развитого метода соответствуют только одному выбору уравнений на характеристиках – линейной функции $H(I_1, I_2)$. Все остальные варианты выбора $H(I_1, I_2)$ будут приводить к многозначным решениям. Суть отличия многозначных решений от классических состоит в том, что эти решения состоят из нескольких листов, «сцепленных» в единое целое в точках ветвления. С точки зрения метода Фурье построения решений краевой задачи для диффузионного уравнения каждый лист должен представляться

отдельным рядом. Вместе с тем отдельные листы многозначного решения динамически связаны, по крайней мере, через точки ветвления, что создает специфическую ситуацию с точки зрения физической интерпретации таких решений. Возникает вопрос – можно ли рассматривать каждый лист многозначного решения как отдельный?

Для двулистных решений, рассмотренных выше, точками ветвления являются такие значения z , при которых оба корня уравнения (23) (соответственно (24)) относительно v совпадают. Отсюда следует, что точки ветвления для первого типа двулистных решений (49) могут быть найдены как решения алгебраических уравнений $p_1(z, \tau) = 0$, а для второго типа решений (42) как решения уравнения $p_2(z, \tau) = 0$. Координаты соответствующих точек ветвления можно записать для (49) так:

$$z_1 = \frac{(\tau - b_1)^2}{4a_1} - c_1\tau,$$

а для (42) таким образом:

$$z_2 = c_2 - \frac{(\tau - b_2)^2}{4a_2}.$$

Точки ветвления перемещаются в пространстве с постоянным ускорением, причем траектории движения для каждого двулистного решения рассмотренного типа отличаются друг от друга. В силу этого двулистные решения, отличающиеся коэффициентами a_i, b_i, c_i , имеют несовпадающие между собой почти при всех τ точки ветвления. Закон движения точек ветвления однозначно определяет вид двулистного решения за исключением произвольного множителя $B(v)$. Поскольку в точках ветвления, соответствующих $p_1(z, \tau) = 0$ (или $p_2(z, \tau) = 0$), решения (50) и (43) содержат множители, имеющие сингулярность в точках ветвления. Наличие особенностей в точках ветвления является основным признаком возникновения многолистных решений, а функциональный вид закона их движения со временем может дать исчерпывающую информацию о типе двулистного решения.

В случае многолистных решений ситуация оказывается аналогичной. При наличии M листов уравнения (23) и (24) относительно v будут иметь по M корней, часть из которых может совпадать. Общее уравнение для отыскания точек ветвления можно получить, вычисляя производную v_z от неявной функции, заданной уравнениями (23) и (24). Для каждого из вариантов I и II имеем:

$$(I) \quad v_z = h'_1(z + v\tau)(1 + v_z\tau); \quad (II) \quad 1 + v_z\tau = h'_2(v)v_z.$$

Отсюда находим:

$$(I) \quad v_z = \frac{h'_1(\zeta)}{1 - h'_1(\zeta)\tau}, \quad (II) \quad v_z = \frac{1}{h'_2(v) - \tau}. \quad (51)$$

По определению, в точках ветвления производная v_z должна иметь особенность. В результате находим, что положение точек ветвления можно

найти из решения алгебраических (или, возможно, трансцендентных) уравнений:

$$(I) \quad h_1'(z + v\tau) = \frac{1}{\tau}, \quad (II) \quad h_2'(v) = \tau, \quad (52)$$

в которые еще необходимо подставить решения для $v(z, t)$, как решения уравнений (23)–(24). Заметим, что в общее решение (39) входит множитель v_z . Согласно (51) этот множитель имеет особенность в точках ветвления, определенных соотношениями (52). Поэтому в каждой точке ветвления функция Ψ (39) будет также иметь точечную особенность. Отсюда следует, что основным признаком многозначности решения является наличие точечных особенностей в структуре решения уже в начальный момент времени.

8. Источник с квадратичным потенциалом

Рассмотрим квадратичный вещественный потенциал (29), получающийся при следующем выборе произвольных функций: $a(\tau) = \Omega^2 = \text{const}$, $b_1(\tau) = b_2(\tau) = c(\tau) = 0$. В случае диффузионной интерпретации уравнения (5) потенциал в правой части может быть как положительным ($\Omega \in R$), так и отрицательным ($\Omega = i\Xi, \Xi \in R$). В первом случае слагаемое с положительным коэффициентом соответствует генерации частиц неоднородным источником, имеющим квадратичное распределение. Во втором случае слагаемое описывает поглощение частиц на стоках, неравномерно распределенных в среде.

В первом случае имеем характеристическое уравнение (31) типа уравнения гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + \Omega^2 z = 0,$$

решениями которого являются функции:

$$Z_1 = e^{i\Omega\tau}, Z_2 = e^{-i\Omega\tau}, \quad (53)$$

тогда $K = Z_1 \dot{Z}_2 - Z_2 \dot{Z}_1 = -2i\Omega$, а $Z_0(\tau) = 0$, так как правая часть уравнения (31) равна нулю. Интегралы движения (33) имеют теперь такой вид:

$$I_1 = \frac{1}{2\Omega} (\Omega z + iv) e^{-i\Omega\tau}, I_2 = \frac{1}{2\Omega} (\Omega z - iv) e^{i\Omega\tau}.$$

Характеристиками в этом случае являются эллипсы, параметрически задаваемые уравнением: $z(\tau) = x(\tau) + iy(\tau) = I_1 e^{i\Omega\tau} + I_2 e^{-i\Omega\tau}$. Конкретное множество таких эллипсов определяется уравнением (22).

По аналогии с уравнением без источников в следующем частном случае:

$$H(I_1, I_2) = I_2 = 0, \quad v = -i\Omega z, I_1 = e^{-i\Omega\tau} z,$$

получаем классические решения уравнения диффузии с квадратичным потенциалом $U = \Omega^2(x^2 + y^2)$. Решение (26) будет в данном случае иметь вид

$$\Psi = A(I_1)e^{-i(\Omega|z|^2 + \Omega\tau)}, \quad (54)$$

где $A(I_1)$ – произвольная, связанная с $W(I_1, I_2)$ соотношением $A(I_1) = \frac{\partial}{\partial I_1} W(I_1, 0)$.

Аналогично, полагая $H(I_1, I_2) = I_1 = 0, I_2 = e^{i\Omega\tau} z$, получаем еще одно решение. Пользуясь принципом суперпозиции, запишем решение в следующем виде:

$$\Psi = A_-(I_1)e^{-i(\Omega|z|^2 + \Omega\tau)} + A_+(I_2)e^{+i(\Omega|z|^2 + \Omega\tau)}. \quad (55)$$

В решении (55) коэффициенты в степени экспоненты не зависят от τ , что совпадает с классическим решением. При этом есть произвольные функции $A_{\pm}(I_1)$, определяющиеся из начального условия. В частном случае $A_{\pm}(I_1) = A_0 / 2$ имеем простое решение $\Psi = A_0 \cos(\Omega(x^2 + y^2 + \tau))$.

Очевидное обобщение рассмотренного случая состоит в выборе $H(I_1, I_2)$ в виде

$$H(I_1, I_2) = k_1 I_1 + k_2 I_2 + k_0 = 0. \quad (56)$$

В этом случае имеем

$$v = -i \frac{\Omega}{q(\tau)} (p(\tau)\zeta + 2k_0), \quad (57)$$

где $p(\tau) = k_2 e^{i\Omega\tau} + k_1 e^{-i\Omega\tau}$, $q(\tau) = k_2 e^{i\Omega\tau} - k_1 e^{-i\Omega\tau}$.

Подстановка v в (54) дает следующее решение:

$$\Psi = \frac{A(I_1)}{q(\tau)} e^{-i\Omega(\gamma(\tau)|z|^2 + 2\beta(\tau)\bar{z})}, \quad (58)$$

где

$$\gamma(\tau) = p(\tau) / q(\tau), \quad \beta(\tau) = k_0 / q(\tau), \quad I_1(z, \tau) = \frac{\Omega z + i v(z, \tau)}{2\Omega} e^{-i\Omega\tau}.$$

Наиболее существенным отличием данного решения от «классического» является то, что множитель $\gamma(\tau)$ перед $|z|^2$ в показателе экспоненты зависит от τ .

Для анализа асимптотики решения на бесконечности ($|z| \rightarrow \infty$) необходимо найти вещественную часть коэффициента при $|z|^2$ в степени экспоненты. Будем далее обозначать этот коэффициент $\Gamma(\tau)$. В рассматриваемом случае $\Gamma(\tau) = \text{Im}[\gamma(\tau)]$. График этой функции представлен на рис. 1 слева. Как видно из графика, $\Gamma(\tau)$ периодически принимает как отрицательные, так и положительные значения. Периодический рост решения на бесконечности объясняется наличием также растущего неоднородного источника.

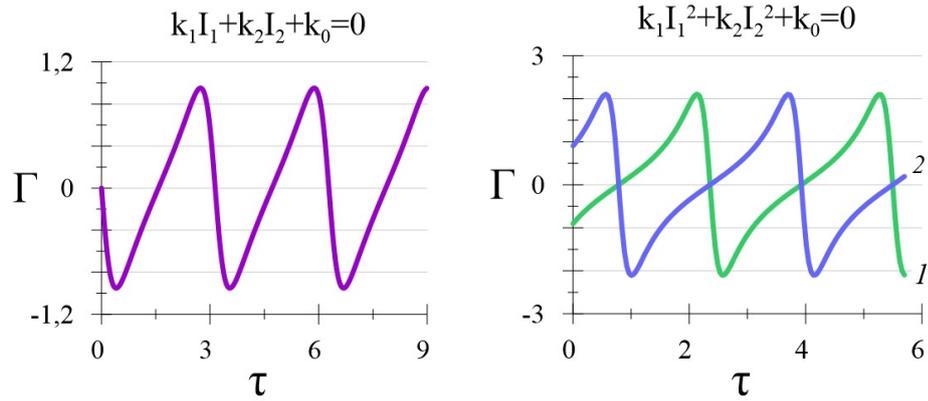


Рис. 1. Асимптотика коэффициента в степени экспоненты (58) и (59) при $|z| \rightarrow \infty$ ($\Omega = 1, k = 1, k = 5, k = 2$)

Решение (58) однолиственное. Простейшее двулиственное решение соответствует выбору $H(I_1, I_2)$ в виде квадратичной функции, например в такой форме:

$$H(I_1, I_2) = k_1 I_1^2 + k_2 I_2^2 + k_0 = 0,$$

где функции $p(\tau)$ и $q(\tau)$ – те же, что и в (57). Решение для v теперь такое:

$$v_{1,2} = -\Omega \left(i\gamma(2\tau)z \mp \sqrt{k_1 k_2 z^2 + k_0 p(2\tau)} / p(2\tau) \right),$$

где $\gamma(\tau) = q(\tau) / p(\tau)$!

Знаки \pm соответствуют двум листам решения. Решение для Ψ можно представить в виде

$$\Psi_{1,2} = \frac{A(I_1)}{p(2\tau)} \left(e^{i\Omega\tau} \pm \frac{ik_1 e^{-i\Omega\tau} z}{\sqrt{k_1 k_2 z^2 + k_0 p(2\tau)}} \right) e^{v(z,\tau)\bar{z}}, \quad (59)$$

где

$$I_1 = (k_2 e^{i\Omega\tau} z \pm i e^{-i\Omega\tau} \sqrt{k_1 k_2 z^2 + k_0 p(2\tau)}) / p(2\tau).$$

В этом случае $\Gamma_{1,2}(\tau) = \text{Im}[\gamma(2\tau)] \mp 2\sqrt{k_1 k_2} \text{Re}[1 / p(2\tau)]$. График этих функций представлен на рис. 1 справа (подписи 1 и 2 соответствуют двум ветвям решения (59)). В этом случае асимптотика решения также периодически зависит от времени.

Все вкладки для случая отрицательного коэффициента в потенциале $U = -\Xi^2(x^2 + y^2)$ аналогичны рассмотренным выше, поэтому сразу приведем результаты для тех же примеров выбора функции $H(I_1, I_2)$.

Интегралы (для этого случая введем обозначения $I_1 = J_1, I_2 = J_2$) имеют вид

$$J_1 = \frac{\Xi z - v}{2\Xi} e^{-\Xi\tau}, J_2 = \frac{\Xi z - v}{2\Xi} e^{\Xi\tau}. \quad (60)$$

В первом примере ($H(J_1, J_2) = J_{1,2} = 0$) имеем следующее решение:

$$\Psi = B_-(J_1)e^{-\Xi|z|^2 - \tau} + B_+(J_2)e^{\Xi|z|^2 + \tau}, \quad (61)$$

где $J_1 = e^{-\Xi\tau}z, J_2 = e^{\Xi\tau}z$, $B_{\pm}(J)$ – так же произвольные функции одного из интегралов движения.

Отличием данного решения от рассмотренного выше является вещественный показатель экспоненты, что позволяет добиться убывания решения на бесконечности. Это соответствует росту распределения стоков в источнике.

Второму примеру, когда $H(J_1, J_2) = k_2J_2 + k_1J_1 + k_0 = 0$, соответствует решение

$$\Psi = B(J_1)e^{-\Xi(\sigma(\tau)|z|^2 + 2\mu(\tau)\bar{z})}, J_1 = (k_2z + k_0e^{-\Xi\tau}) / h(\tau), \quad (62)$$

где $\sigma(\tau) = s(\tau) / h(\tau), \mu(\tau) = k_0 / h(\tau)$ выражаются через новые вспомогательные функции:

$$s(\tau) = k_2e^{\Xi\tau} + k_1e^{-\Xi\tau}, h(\tau) = k_2e^{\Xi\tau} - k_1e^{-\Xi\tau}.$$

В третьем случае $H(J_1, J_2) = k_2J_2^2 + k_1J_1^2 + k_0 = 0$, аналогичные вычисления дают два листа решения для функции $v(z, \tau)$:

$$v_{1,2}(z, \tau) = \Xi \left[-h(2\tau)z \pm 2\sqrt{-k_0s(2\tau) - k_1k_2z^2} \right] / s(2\tau), \quad (63)$$

и, соответственно, два решения исходного уравнения:

$$\Psi_{1,2} = \frac{B(J_{\mp})}{s(2\tau)} \left(k_2e^{\Xi\tau} \pm \frac{k_1k_2z}{\sqrt{-k_0s(2\tau) - k_1k_2z^2}} e^{-\Xi\tau} \right) e^{v_{1,2}(z, \tau)}, \quad (64)$$

где интеграл движения имеет вид

$$J_{\pm} = \left(k_2e^{\Xi\tau}z \pm e^{-\Xi\tau}\sqrt{-k_0s(2\tau) - k_1k_2z^2} \right) / s(2\tau). \quad (65)$$

На рис. 2 представлены графики $\Gamma(\tau)$ для трех рассмотренных выше случаев: $\Gamma(\tau) = -s(\tau) / h(\tau), \Gamma_{1,2} = -(h(2\tau) \mp 2\sqrt{-k_1k_2}) / s(2\tau)$. При соответствующем выборе знаков коэффициентов $k_{0,1,2}$ эти функции вещественны и отрицательны, что обеспечивает убывание решения на бесконечности.

Решения (64) имеют особенность в точках $z_0(\tau) = \pm\sqrt{-k_0s(2\tau) / (k_1k_2)}$, в которых подкоренное выражение в знаменателе обращается в ноль. Как видно из (63), эти же точки являются точками ветвления, так как две ветви

функции $v(z, \tau)$ равны в них, а также в них принимают одинаковые значения и интегралы движения (65). Этот факт позволяет устранить особенности в решении (64). Для этого рассмотрим сумму функций $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, которая также является решением исходного линейного уравнения:

$$\Psi = \frac{B(J_-) + B(J_+)}{s(2\tau)} k_2 e^{\Xi\tau} + k_1 k_2 z e^{-\Xi\tau} \frac{B(J_-) e^{v_1(z, \tau)\bar{z}} - B(J_+) e^{v_2(z, \tau)\bar{z}}}{\sqrt{-k_0 s(2\tau) - k_1 k_2 z^2}}. \quad (66)$$

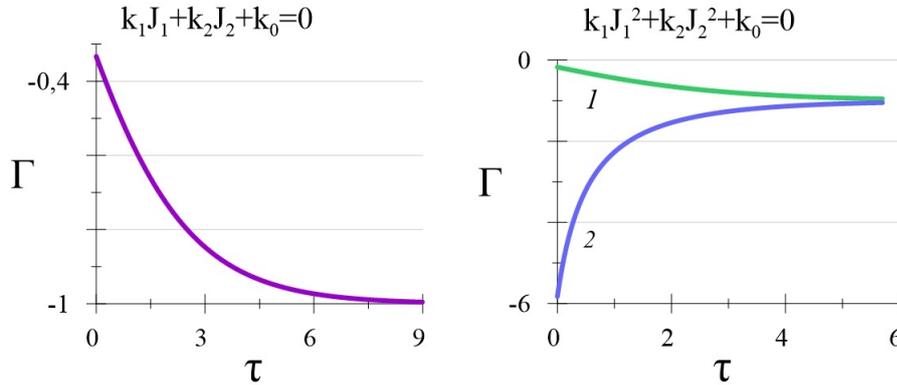


Рис. 2. Асимптотика коэффициента в степени экспоненты (62) и (64) при $|z| \rightarrow \infty$ ($\Xi = 0, 3$, $k_0 = 1$, $k_1 = -1$, $k_2 = 2$)

Исследуем поведение данного решения вблизи точек z_0 , для этого рассмотрим предел $z \rightarrow z_0(\tau)$. Предел первого слагаемого в (66):

$$L_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{B(J_-) + B(J_+)}{s(2\tau)} k_2 e^{\Xi\tau} = 2k_2 \frac{B(J_0)}{p(2\tau)} e^{v_0\bar{z} + \Xi\tau}, \quad (67)$$

где индекс «0» имеют соответствующие величины при $z = z_0$.

Для нахождения предела второго слагаемого необходимо применить правило Лопиталья, так как числитель и знаменатель стремятся к нулю при $z \rightarrow z_0$:

$$\begin{aligned} L_2 &= C_0 \lim_{z \rightarrow z_0} z \frac{B(J_-) e^{v_1(z, \tau)\bar{z}} - B(J_+) e^{v_2(z, \tau)\bar{z}}}{\sqrt{z_0^2 - z^2}} = \\ &= C_0 \lim_{z \rightarrow z_0} \left[B'_- J'_- e^{v_1(z, \tau)\bar{z}} - B'_+ J'_+ e^{v_2(z, \tau)\bar{z}} + B_- v'_1 e^{v_1(z, \tau)\bar{z}} - \right. \\ &\quad \left. - B_+ v'_2 e^{v_2(z, \tau)\bar{z}} \right] / \left[\frac{-z}{\sqrt{z_0^2 - z^2}} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $C_0 = \sqrt{k_1 k_2} e^{-\Xi\tau} / s(2\tau)$, $B_{\pm} = B(J_{\pm})$. После некоторых вычислений получаем следующее выражение:

$$L_2 = -C_0 \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sqrt{z_0^2 - z^2}}{z} \left[\frac{e^{-\Xi\tau} k_2}{s(2\tau)} \left(B'_- e^{v_1(z,\tau)\bar{z}} - B'_+ e^{v_2(z,\tau)\bar{z}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\Xi h(2\tau)}{s(2\tau)} \left(B_- e^{v_1(z,\tau)\bar{z}} - B_+ e^{v_2(z,\tau)\bar{z}} \right) + \frac{e^{-\Xi\tau} \sqrt{k_2 k_2}}{s(2\tau)} z \left(\frac{B'_- e^{v_1(z,\tau)\bar{z}} + B'_+ e^{v_2(z,\tau)\bar{z}}}{\sqrt{z_0^2 - z^2}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2\Xi \sqrt{k_1 k_2}}{s(2\tau)} z \left(\frac{B_- e^{v_1(z,\tau)\bar{z}} + B_+ e^{v_2(z,\tau)\bar{z}}}{\sqrt{z_0^2 - z^2}} \right) \right].$$

Первые два члена стремятся к нулю, так как слагаемые, входящие в разности $(v_{1,2}, J_{\pm}, B_{\pm})$, равны в точке z_0 . Третье и четвертое слагаемые в сумме также равны друг другу в точке z_0 . Окончательно получается следующее выражение для предела:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Psi = L_1 + L_2 = \\ = 2k_2 B_0 \frac{s(2\tau) e^{\Xi\tau} + 2\Xi k_1 z_0 e^{-\Xi\tau}}{s^2(2\tau)} e^{v_0 \bar{z}} - \frac{2k_1 k_2 z_0}{s^2(2\tau)} B'_0 e^{v_0 \bar{z} - 2\Xi\tau}. \quad (68)$$

Таким образом, сумма сингулярных в точках ветвления решений, относящихся к разным ветвям, образует новое решение, не имеющее особенностей в точках ветвления. На рис. 3, 4 представлены вещественная и мнимая части решения (66).

Заключение

Развитый в данной работе метод дает возможность строить расширенный класс решений задачи о распространении излучения в неоднородной линейной среде с квадратичным по поперечным координатам показателем преломления.

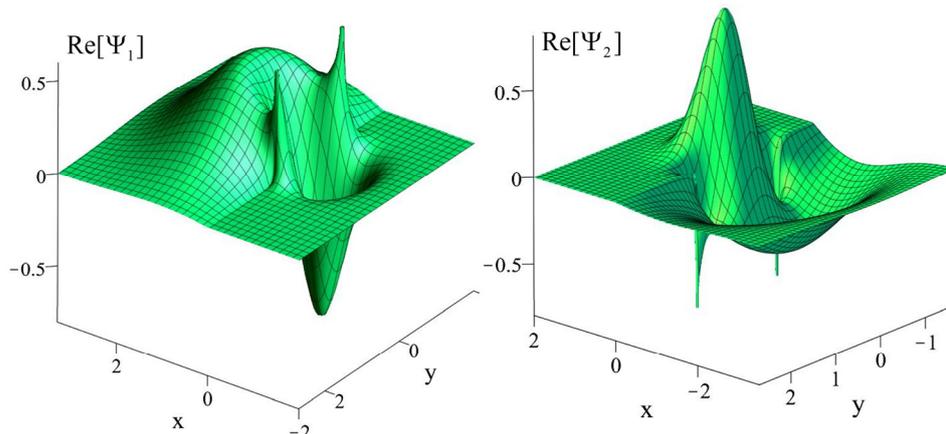


Рис. 3. Вещественная часть решения (66) ($B(J) = 1, \Xi = 0,3, k_0 = -1, k_1 = -1, k_2 = 5$)

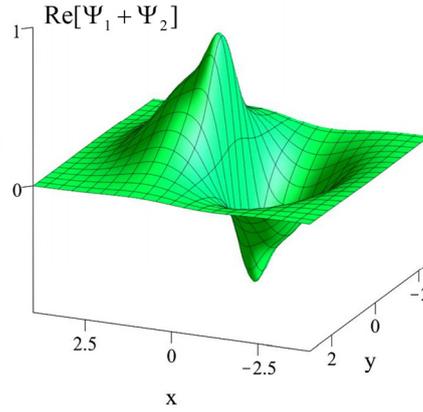


Рис. 3. Окончание

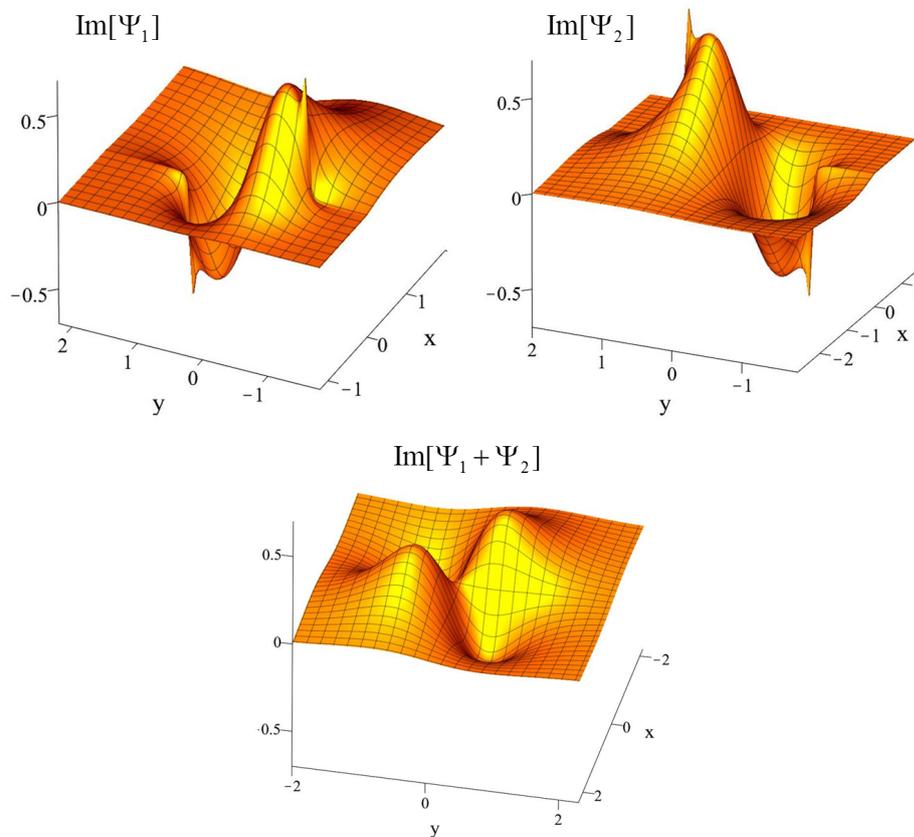


Рис. 4. Мнимая часть решения (66) ($B(J) = 1, \Xi = 0,3, k_0 = -1, k_1 = -1, k_2 = 5$)

Показано, что «классические» решения являются частным случаем общего класса решений. Топологически различные варианты решений определяются в уравнении (22) функцией $H(I_1, I_2)$, связанной с начальными условиями. Все полученные решения переносятся на случай уравнений

Шредингера квантовой теории с аналогичными по структуре потенциалами. Также полученные результаты являются дополнением к общему выводу о существовании классов многозначных решений уравнений математической физики гиперболического и эллиптического типа [1, 2].

Библиографический список

1. **Журавлев, В. М.** Многомерные нелинейные волновые уравнения с многозначными решениями / В. М. Журавлев // Теоретическая и математическая физика. – 2013. – Т. 174, № 2. – С. 236–246.
2. **Журавлев, В. М.** Многомерные квазилинейные уравнения первого порядка и многозначные решения уравнений гиперболического и эллиптического типов / В. М. Журавлев // Теоретическая и математическая физика. – 2016. – Т. 186, № 3. – С. 371–385
3. **Журавлев, В. М.** О многозначных решениях двумерных линейных параболических уравнений / В. М. Журавлев, В. М. Морозов // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании : материалы XIII Международ. науч. конф. (Саранск, 12–16 июля 2017 г.). – Саранск : СВМО, 2017. – С. 330–340.
4. **Рождественский, Б. Л.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М. : Наука, 1978. – 687 с.

References

1. Zhuravlev V. M. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2013, vol. 174, no. 2, pp. 236–246.
2. Zhuravlev V. M. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2016, vol. 186, no. 3, pp. 371–385
3. Zhuravlev V. M., Morozov V. M. *Differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya v matematicheskom modelirovanii: materialy XIII Mezhdunar. nauch. konf. (Saransk, 12–16 iyulya 2017 g.)* [Differential equations and their applications in mathematical simulation: proceedings of XIII International scientific conference (Saransk, July 12th-16th, 2017)]. Saransk: SVMО, 2017, pp. 330–340.
4. Rozhdestvenskiy B. L., Yanenko N. N. *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike* [Systems of quasilinear equations and their application in gas dynamics]. Moscow: Nauka, 1978, 687 p.

Журавлев Виктор Михайлович

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра теоретической
физики, Ульяновский государственный
университет (Россия, г. Ульяновск,
ул. Льва Толстого, 42); Казанский
федеральный университет (Россия,
г. Казань, ул. Кремлевская, 18)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Zhuravlev Viktor Mikhaylovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department
of theoretical physics, Ulyanovsk State
University (42 Lva Tolstogo street,
Ulyanovsk, Russia); Kazan Federal
University (18 Kremlyovskaya street,
Kazan, Russia)

Морозов Виталий Михайлович
младший научный сотрудник,
Ульяновский государственный
университет (Россия, г. Ульяновск,
ул. Льва Толстого, 42)

E-mail: aielar@rambler.ru

Morozov Vitaliy Mikhaylovich
Junior researcher, Ulyanovsk State
University (42 Lva Tolstogo street,
Ulyanovsk, Russia)

УДК 51-72, 530.181, 532.51, 538.9

Журавлев, В. М.

Многочисленные решения уравнений диффузии и гидродинамика /
В. М. Журавлев, В. М. Морозов // Известия высших учебных заведений. По-
волжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 1 (45). –
С. 87–110. – DOI 10.21685/2072-3040-2018-3-8.